

Turing ジャンプからはじめる二階算術の ω モデル論

橋本 航気

名古屋大学大学院情報学研究科

November 27, 2022

概要

自然数の部分集合が扱える二階算術では、「体系 hoge のモデルが存在する」という主張が書ける。

その（厳密にはもう少し手を加えた形の）主張には Turing ジャンプによる計算論的特徴づけを持つものもある。

$\text{Base} \vdash \forall X \subseteq \mathbb{N} (\text{体系 hoge の } X \text{ を含むある種のモデルが存在する} \\ \Leftrightarrow \text{huga 回の } X \text{ の Turing ジャンプが存在する})$

以上の内容を二階算術の形式的体系やそのモデルを紹介しつつ説明する。

- ① Turing ジャンプの定義と性質
- ② 二階算術の形式的体系と ω モデル, 及び簡単な例
- ③ Turing ジャンプと coded ω -model との対応

① Turing ジャンプの定義と性質

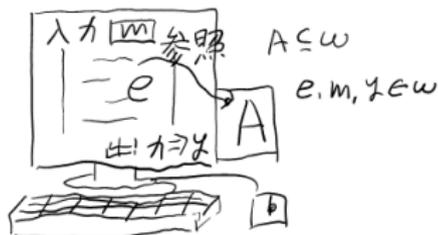
② 二階算術の形式的体系と ω モデル, 及び簡単な例

③ Turing ジャンプと coded ω -model との対応

定義

$\Phi_e^A(m)$ で Turing functional を表す.

$\Phi_e^A(m) = y$ は大雑把には、外付けハードディスク A が差し込まれたコンピュータ上でプログラム e に m を入力して実行し、結果 y が出力された、というもの.



変なプログラムや入力を考えると、計算が停止しないこともある。つまり、 $\Phi_e^A(*)$ は全ての入力上で定義されるとは限らない。

B が A から計算できる

定義 (Turing 還元)

$A, B \subseteq \omega$ について, B が A に Turing 還元されるとは,

$$B \text{ の特性関数} = \Phi_e^A$$

を満たす $e \in \omega$ が存在することをいう. これを $B \leq_T A$ と書く. 加えて, 逆が成り立たないとき特に $B <_T A$ と表記する.

$B \leq_T A$ は, 外付けハードディスク A が差し込まれた状態でなら B の特性関数を正しく計算できるプログラム e が存在する, と読める.



$B \leq_T \emptyset$ のとき B は計算可能集合とよばれる.

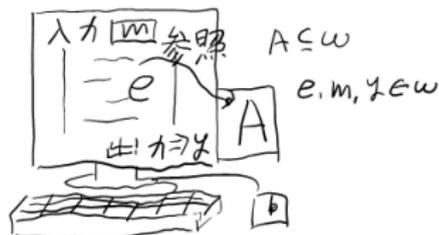
定義 (Turing ジャンプ in メタ)

$A \subseteq \omega$ に対して, その Turing ジャンプ $TJ(A)$ を以下で定める.

$$TJ(A) := \{ (m, e) \in \omega \mid \exists y (\Phi_e^A(m) = y) \}$$

ここで $(*, *) : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ は数のペアリング $(m, e) = (m + e)^2 + m$

外付けハードディスク A が差し込まれた状態でプログラム e に入力 m を入れて計算させて, 計算が停止する (m, e) 対全体



$\text{TJ}(A) = \{ (m, e) \in \omega \mid \exists y(\Phi_e^A(x) = y) \}$ の性質

命題 (Turing ジャンプの $\Sigma_1(A)$ 完全性 (の一部))

外付けの $A \subseteq \omega$ を使うことを前提にした, 具体的なプログラムの停止入力全体の集合はすべて $\text{TJ}(A)$ に Turing 還元可能.

すなわち, 各 $e \in \omega$ について次が成り立つ.

$$\{ m \in \omega \mid \exists y(\Phi_e^A(m) = y) \} \leq_T \text{TJ}(A)$$

事実

$A \subseteq \omega$ について

$$A <_T \text{TJ}(A) <_T \cdots <_T \text{TJ}(n, A) <_T \text{TJ}(n+1, A) <_T \cdots$$

となる. ただしここで $\begin{cases} \text{TJ}(0, A) & = A \\ \text{TJ}(n+1, A) & = \text{TJ}(\text{TJ}(n, A)) \end{cases}$

① Turing ジャンプの定義と性質

② 二階算術の形式的体系と ω モデル, 及び簡単な例

③ Turing ジャンプと coded ω -model との対応

定義 (L_2)

二階算術の言語 L_2 は次.

- 数変数 x, y, n, m, a, b, \dots
- 集合変数 X, Y, U, V, A, B, \dots
- 定数記号 $0, 1$
- 二変数関数記号 $+, \cdot$
- 二変数関係記号 $<, \in$

原子論理式は $t < s, t \in X, t = s$ の三種類 (t, s は $0, 1, +, \cdot, x, y, z, \dots$ を組み合わせて得られる項).

定義 (Δ_0^0 論理式)

L_2 論理式 θ が Δ_0^0 であるとは、集合量化 ($\forall X, \exists Y$) を含まず、数量化 ($\forall x, \exists m$) を含んだとしても有界量化 ($\forall n < t, \exists x \leq s$ など) のみであることをいう。

例: $\forall x < 3 \exists n \leq 2x (1 + n \in Z)$

定義 ($\Sigma_k^0, \Pi_k^0, \Sigma_k^1, \Pi_k^1$ 論理式)

Δ_0^0 をベースにして $\Sigma_k^0, \Pi_k^0, \Sigma_k^1, \Pi_k^1$ 論理式が以下のように定義される。

$$\Sigma_k^0 \cdots \exists x_1 \forall x_2, \dots, Q x_k \theta \quad \text{where } \theta \in \Delta_0^0$$

$$\Pi_k^0 \cdots \forall x_1 \exists x_2, \dots, Q x_k \theta \quad \text{where } \theta \in \Delta_0^0$$

$$\Sigma_k^1 \cdots \exists X_1 \forall X_2, \dots, Q X_k \varphi \quad \text{where } \varphi \in \Sigma_n^0 \text{ for some } n \in \omega$$

$$\Pi_k^1 \cdots \forall X_1 \exists X_2, \dots, Q X_k \varphi \quad \text{where } \varphi \in \Sigma_n^0 \text{ for some } n \in \omega$$

$\Delta_0^1 := \bigcup_{k \in \omega} \Sigma_k^0 = \bigcup_{k \in \omega} \Pi_k^0 \ni \varphi$ を算術的論理式とよぶ。

定義 (ω モデル)

次の七つ組を ω モデルとよぶ.

$$(\omega, \mathcal{S}, +, \cdot, 0, 1, <)$$

ただしここで $(\omega, +, \cdot, 0, 1, <)$ は通常の一階算術の構造で, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$,

ω モデルはその二階部分 \mathcal{S} で決定されるので, 以降 ω モデルをその二階部分で代表する.

例

$$\mathcal{S} = \{\emptyset, \text{偶数全体}, \omega\} \text{ なら } \mathcal{S} \models \underbrace{\exists X \overbrace{\forall n (n \in X \leftrightarrow \underbrace{\exists k \leq n (n = 2k))}_{\Delta_0^0 \text{論理式}}}}_{\Sigma_1^1 \text{論理式}}.$$

ω モデルの簡単に確認できる性質

命題

任意の ω モデル \mathcal{S} について以下が成り立つ。
 \mathcal{S} パラメータを許したすべての算術的論理式 θ について、

$$\mathcal{P}(\omega) \models \theta \Leftrightarrow \mathcal{S} \models \theta$$

命題

任意の ω モデル \mathcal{S} について以下が成り立つ。
 \mathcal{S} パラメータを許したすべての L_2 論理式 $\varphi(n)$ について、

$$\mathcal{S} \models \varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)) \rightarrow \forall n\varphi(n)$$

証明.

メタ (集合論) において $\{n \in \omega \mid \mathcal{S} \models \varphi(n)\}$ という集合を作り、メタにおける帰納法で示せる。 □

二階算術の形式的体系

定義

二階算術の形式的体系 ACA_0 は次の公理からなる.

- ① 和, 積, 0, 1, 大小などに関する基本的な公理 (PA^-)
- ② $\forall X(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \rightarrow n+1 \in X) \rightarrow \forall n(n \in X))$
- ③ $\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$ (ここで φ は 算術的論理式)
 $\exists x_1 \forall x_2, \dots, \forall x_k \Delta_0^0$ の形

最後は公理図式で, 算術的内包公理図式とよばれる.

この ACA_0 よりも弱い体系に RCA_0 がある. RCA_0 は二階算術上の逆数
学で土台となる体系で, 計算可能集合全体が最小の ω モデルになる.

Turing ジャンプの二階算術上での形式化

定義

$\Phi(e, n, X)$ を RCA_0 上の Σ_1^0 普遍論理式の一つとする。つまり, $\Phi(e, n, X)$ はそれ自身 Σ_1^0 であり, 任意の Σ_1^0 論理式 $\varphi(x, n, X)$ について以下をみたす。

$$\text{RCA}_0 \vdash \forall x \exists e \forall X \forall n (\varphi(x, n, X) \leftrightarrow \Phi(e, n, X))$$

$\Phi(e, n, X)$ は e をいろいろ動かすことですべての Σ_1^0 論理式を表せる。

定義 (Turing ジャンプ in RCA_0)

$A \subseteq \mathbb{N}$ に対して, A の Turing ジャンプはそれが存在するとき以下とする。

$$\text{TJ}(A) := \{ (m, e) \mid \Phi(e, m, A) \}$$

事実

RCA_0 上で次の二つは同値.

- 算術的内包公理図式^a
- $\forall X \exists T J(X)$

$${}^a \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow \varphi(n)) \quad (\text{ここで } \varphi \text{ は } \underbrace{\text{算術的論理式}}_{\exists x_1 \forall x_2, \dots, Q x_k \Delta_0^0 \text{ の形}})$$

ACA_0 の最小の ω モデルは次で与えられる.

$$\begin{aligned} \text{ARITH} &:= \{ A \subseteq \omega \mid A \text{ は算術的論理式で定義可能} \} \\ &= \{ A \subseteq \omega \mid A \leq_T \text{TJ}(n, \emptyset) \text{ for some } n \in \omega \} \end{aligned}$$

cf. Post の定理

ACA₀ の素朴な強化先

定義

$\Delta_1^1\text{-CA}_0 := \text{ACA}_0 + \Delta_1^1$ 論理式の内包公理図式

$\text{ACA}_0^+ := \text{ACA}_0 + \forall X \exists T J(\omega, X)$

定理 ([1]Theorem VIII.4.5)

$\Delta_1^1\text{-CA}_0$ は $\text{HYP} = \{X \subseteq \omega \mid X \text{ は超算術的}\}$ を最小の ω モデルにもつ。

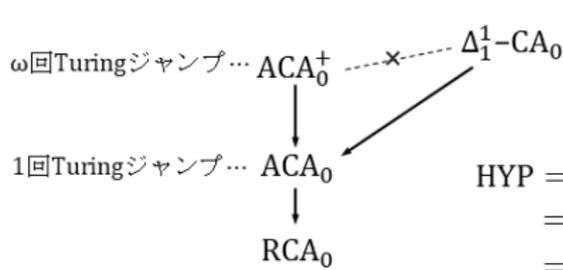
命題

ACA_0^+ には ω 回ジャンプに閉じる最小の ω モデルが存在する。

事実

ACA_0^+ と $\Delta_1^1\text{-CA}_0$ は比較不能. (cf. [1]TheoremIX.4.4)

以上まとめ



$T \rightarrow S \dots T \vdash S \ \& \ S \not\vdash T$
 $T \not\vdash S \dots T \not\vdash S \ \& \ S \not\vdash T$

$HYP = \{X \subseteq \omega \mid X \text{ は超算術的}\}$
 $= \{X \subseteq \omega \mid X \leq_T T\mathcal{J}(\alpha, \emptyset) \text{ for some } \alpha < \omega_1^{ck}\}$
 $= \{X \subseteq \omega \mid X \text{ は } \Delta_1^1 \text{ definable}\}$

\subseteq
 $\{X \subseteq \omega \mid X \leq_T T\mathcal{J}(\omega \cdot n, \emptyset) \text{ for some } n \in \omega\}$

\cup
 $ARITH = \{X \subseteq \omega \mid X \text{ は算術的}\}$
 $= \{X \subseteq \omega \mid X \leq_T T\mathcal{J}(n, \emptyset) \text{ for some } n \in \omega\}$
 $= \{X \subseteq \omega \mid X \text{ は } \Delta_0^1 \text{ definable}\}$

\cup
 $REC = \{X \subseteq \omega \mid X \text{ は計算可能}\}$
 $= \{X \subseteq \omega \mid X \leq_T \emptyset\}$
 $= \{X \subseteq \omega \mid X \text{ は } \Delta_1^0 \text{ definable}\}$

対応する最小の ω モデル

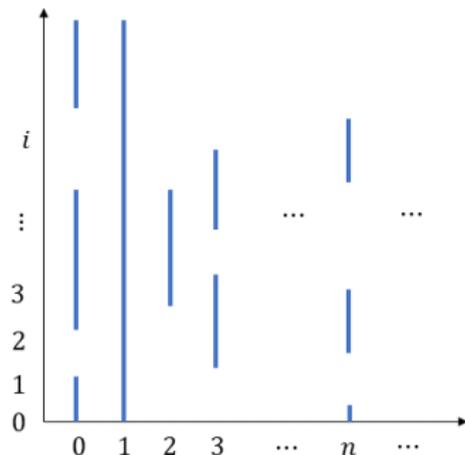
① Turing ジャンプの定義と性質

② 二階算術の形式的体系と ω モデル, 及び簡単な例

③ Turing ジャンプと coded ω -model との対応

二階算術における集合族のコード化

形式的体系内部における自然数全体の集合 ($n = n$ に内包公理を適用して得られる) は \mathbb{N} で表し, メタにおける自然数全体の集合 ω と区別する. 数のペアリング $(i, n) = (i + n)^2 + i$ によって $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ とみなす. 以上のもとで $W \subseteq \mathbb{N}$ は集合族 $\langle (W)_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ のコードとみなすことができる,



縦棒が $(W)_0, (W)_1, (W)_2, (W)_3, \dots, (W)_n, \dots$

定義 (coded ω -model)

以下は RCA_0 内部で定義される. 集合 $W \subseteq \mathbb{N}$ に対し, それがコードしている集合族 $\langle (W)_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ を二階部分にして得られる L_2 構造

$$(\mathbb{N}, \langle (W)_n | n \in \mathbb{N} \rangle, +, 0, 1, <)$$

を coded ω -model とよぶ.

coded ω -model において充足の概念 (\models) がきちんと定まるか否かは, そのコード ($\subseteq \mathbb{N}$) の存在とは別問題.

ACA_0 なら充足がきちんと定まるか否かの問題は"おおよそ"無視できる. すなわち,

命題 ([1] Lemma VII.2.2 の一般化)

すべての"メタ" L_2 論理式 φ について次が ACA_0 で証明できる.

任意の coded ω -model M に対し, φ に M のパラメータを任意に代入した結果の φ^M について次が成り立つ.

$$M \models \varphi^M \text{ or } M \not\models \varphi^M$$

coded ω -model の簡単に確認できる性質.

命題

すべての算術的論理式 θ について次が ACA_0 で証明できる.
任意の coded ω -model M に対し, θ に M のパラメータを任意に代入した結果の θ^M について次が成り立つ.

$$\theta^M \leftrightarrow M \models \theta^M$$

命題 (ACA_0 proves)

すべてのメタ L_2 論理式 $\varphi(n)$ について次が ACA_0 で証明できる.
任意の coded ω -model M に対し, $\varphi(n)$ の n 以外の箇所に M のパラメータを任意に代入した結果の $\varphi^M(n)$ について次が成り立つ.

$$M \models \varphi^M(0) \wedge \forall n(\varphi^M(n) \rightarrow \varphi^M(n+1)) \rightarrow \forall n\varphi^M(n)$$

証明.

算術的内包公理で $\{n \in \mathbb{N} \mid M \models \varphi^M(n)\}$ を作ればよい. □

Turing ジャンプと coded ω -model との対応

定理

ACA_0 で以下の同値が成り立つ.

$$\forall X((\exists \text{coded } \omega\text{-model } M s.t. X \in M \models ACA_0) \leftrightarrow \exists TJ(\omega, X))$$

$$\forall X((\exists \text{coded } \omega\text{-model } M s.t. X \in M \models ACA_0^+) \leftrightarrow \exists TJ(\omega^2, X))$$

$$\forall X((\exists \text{coded } \omega\text{-model } M s.t. X \in M \models \Delta_1^1\text{-}CA_0) \leftrightarrow \forall \alpha < \omega_1^X \exists TJ(\alpha, X))$$

証明.

上二つは比較的容易に示せる. 三段目は (\leftarrow) が [1]Lemma VIII.4.19 そのものであり, (\rightarrow) は [7]Lemma 7.5 の証明から分かる. \square

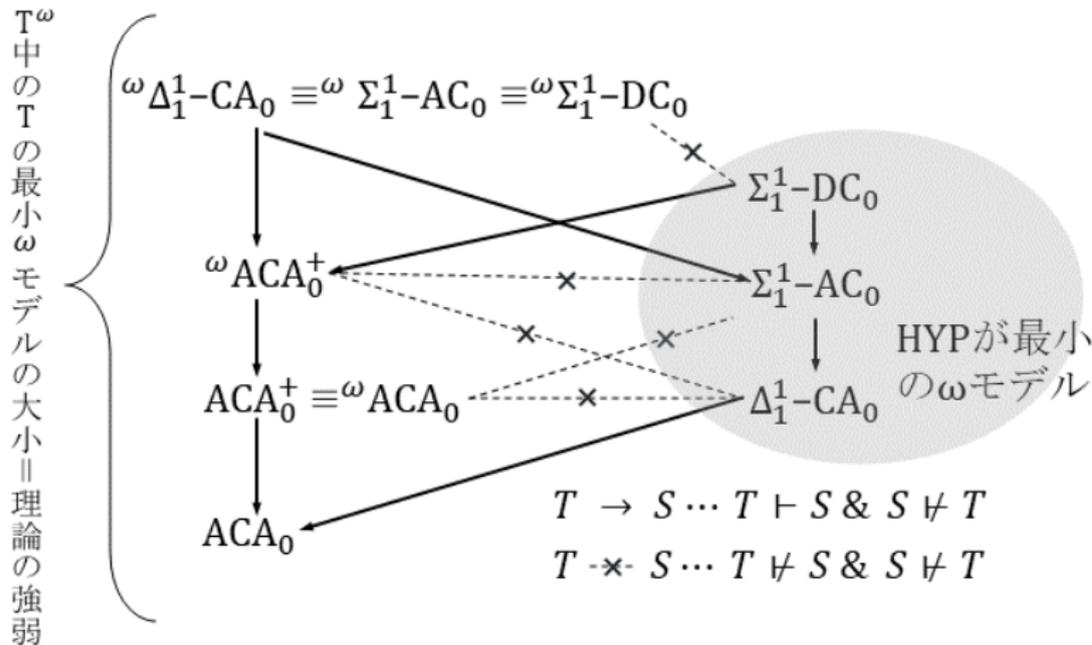
三段目の $\Delta_1^1\text{-}CA_0$ は $\text{weak}\Sigma_1^1\text{-}AC_0$ や $\Sigma_1^1\text{-}AC_0$, $\Sigma_1^1\text{-}DC_0$ に変えてもよい.

定義

T は再帰的公理化可能な L_2 理論とする. ここで ${}^\omega T$ を次のように定める.

$${}^\omega T := ACA_0 + \forall X \exists \text{ coded } \omega\text{-model } M \text{ s.t. } X \in M \models T$$

既存の事実と直前の定理から分かる含意関係.



定義

$$\text{ATR}_0 := \text{ACA}_0 + \forall X \forall \alpha < \omega_1^X \exists \text{TJ}(\alpha, X)$$

つまり $\text{ATR}_0 \equiv {}^\omega\Delta_1^1\text{-CA}_0$

ATR_0 の ω モデルに関して次が知られている。

定理 ([1]Theorem VIII.6.12 (の系))

再帰的公理化可能で ATR_0 を含意する L_2 理論には最小の ω モデルは存在しない。

最後に ${}^\omega\text{ATR}_0$ について調べていく。

定義 (ω モデル反映)

$\varphi(X)$ を X のみを自由集合変数にもつ論理式とし. 次の形の論理式を RFN_φ とかく.

$$\forall X[\varphi(X) \rightarrow \exists \text{coded } \omega\text{-model } M \text{ s.t. } X \in M \models \text{ACA}_0 + \varphi(X)]$$

そして $\Sigma_k^1\text{-RFN}_0$ を以下とする.

$$\text{ACA}_0 + \{ \text{RFN}_\varphi \mid \varphi(X) \text{ は } X \text{ のみを自由集合変数にもつ } \Sigma_k^1 \text{ 論理式} \}$$

命題

$$\Sigma_2^1\text{-RFN}_0 \equiv \Sigma_1^1\text{-RFN}_0 \equiv \text{ACA}_0^+$$

定理 ([1]Theorem VIII.5.12, Theorem VIII.4.11)

$\Sigma_3^1\text{-RFN}_0 \equiv \Sigma_1^1\text{-DC}_0 \equiv \Pi_1^1\text{-TI}_0$ であり, HYP を最小の ω モデルにもつ.

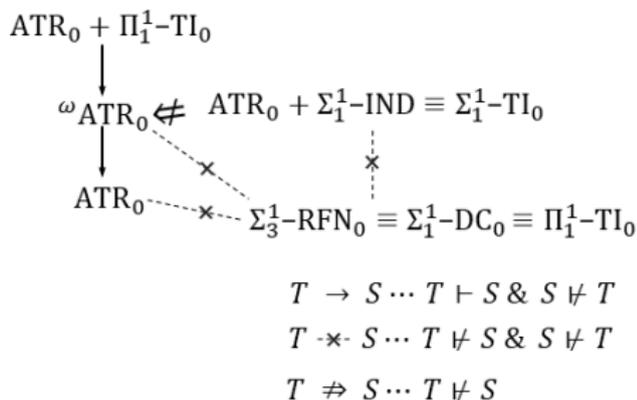
$\forall X \exists$ coded ω -model M s.t. $X \in M \models \text{ATR}_0$ を調べる.

命題

$\text{ATR}_0 + \Pi_1^1\text{-TI}_0 \vdash (\omega\text{ATR}_0)$

証明.

$\Pi_1^1\text{-TI}_0 \equiv \Sigma_3^1\text{-RFN}_0$ と ATR_0 が Π_2^1 文で有限公理化できることから分かる. \square



$\forall X \exists$ coded ω -model M s.t. $X \in M \models \text{ATR}_0$ を調べる.

事実 ([1]Theorem VIII.5.6, ω -model Incompleteness)

T を ACA_0 を含意する再帰的公理化可能な L_2 理論とする. このとき, もし T の可算 ω モデルがあれば, 以下の可算 ω モデルも存在する.

$$T + \neg \exists \text{ coded } \omega\text{-model of } T$$

命題

$$\omega\text{ATR}_0 \not\vdash \text{ATR}_0 + \Pi_1^1\text{-TI}_0$$

証明.

ωATR_0 には可算 ω モデルがあるので, ω -model Incompleteness から $\omega\text{ATR}_0 + \neg \exists$ coded ω -model of ωATR_0 の可算 ω モデル S がとれる. ωATR_0 は有限個の Π_2^1 文で公理化できることから, この S が $\Sigma_3^1\text{-RFN}_0$, すなわち $\Pi_1^1\text{-TI}_0$ の充足に失敗していることが分かる. \square

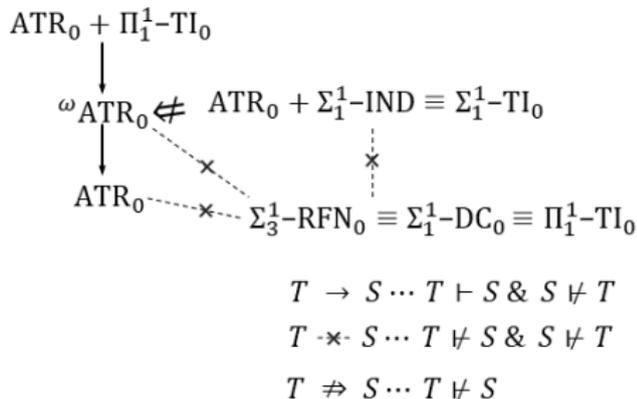
$\forall X \exists$ coded ω -model M s.t. $X \in M \models \text{ATR}_0$ を調べる.

命題

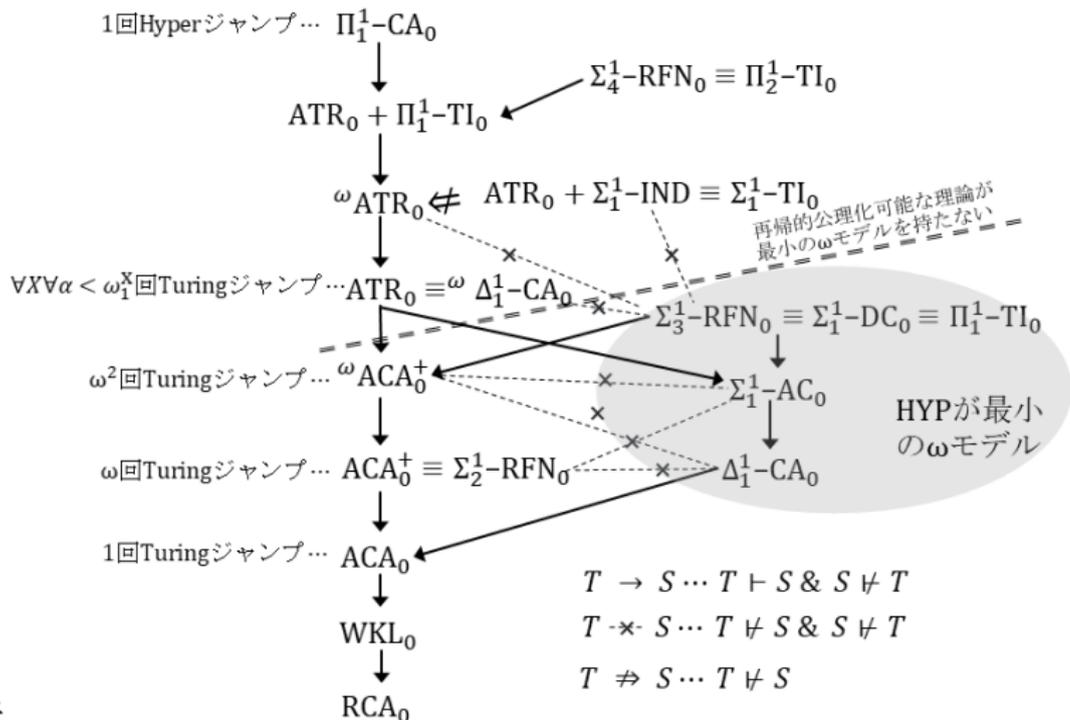
ωATR_0 と $\Sigma_1^1\text{-DC}_0$ は比較不能

証明.

$\Sigma_1^1\text{-DC}_0 \not\vdash (\omega\text{ATR}_0)$ は
 $\Sigma_1^1\text{-DC}_0 \not\vdash \text{ATR}_0$ から分かる.
 $\omega\text{ATR}_0 \not\vdash \Sigma_1^1\text{-DC}_0$ は先と同様に
 ω -model Incompleteness を用いて示せる. \square



$\text{ATR}_0 + \Sigma_1^1\text{-IND} \equiv \Sigma_1^1\text{-TI}_0$ は [4] の Theorem 2.5 である. その他はここまでに提示した事実や第二不完全性定理から従う.



総括

Turing ジャンプの繰り返し回数によって、いくつかの体系の coded ω -model の存在が特徴づけられる。

ATR_0 は最小の ω モデルを持たないので扱いが難しそうだが、 ATR_0 の coded ω -model の存在とよい対応のある計算論的概念がないだろうか。

参考文献 I

全体を通して [1] の VII, VIII, IX 章の内容を参考にした。Turing ジャンプ中心の計算可能性理論の話題に関しては以下 [2], [3] を参考にした。

Σ_1^0 普遍論理式 Φ の構成はほとんど一階算術の話であり、厳密性を求めるなら [8] の 9 章がよいと思うが、若干の覚悟が必要なので [9] の pp160-170 で直感を得るとよいと思う。

ATR_0 と超限帰納法の関係については [4] にまとまっている。

$\Sigma_{3+k}^1\text{-RFN}_0 \equiv \Pi_{1+k}^1\text{-TI}_0$ は [6] に証明がある。

$\Sigma_1^1\text{-DC}_0$ から $\Delta_1^1\text{-CA}_0$ 周辺の超算術的解析の体系については [5] で概説が見られる。

今回ほとんど話さなかったが、 ACA_0 より弱い二階算術については最近出版された [10] が詳しい。

[1] Stephen G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1999

[2] 篠田 寿一, 帰納的関数と述語, 河合文化教育研究所, 1997.

参考文献 II

- [3] Robert I. Soare, Turing Computability: Theory and Applications, Springer, 2016.
- [4] Stephen G. Simpson, Σ_1^1 and Π_1^1 Transfinite Induction, Editor(s): D. Van Dalen, D. Lascar, T.J. Smiley, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier, Volume 108, Pages 239-253, 1982,
- [5] Antonio Montalbán, On the Π_1^1 -separation principle, Mathematical Logic Quarterly 54 (6) ,563-578,2008.
- [6] Gerhard Jäger, Thomas Strahm, Bar induction and ω model reflection, Annals of Pure and Applied Logic, Volume 97, Issues 1-3, pp 221-230,1999.
- [7] Jeremy Avigad and Richard Sommer, The model-theoretic ordinal analysis of theories of predicative strength, The Journal of Symbolic Logic, 64(1):327-349,1999.

参考文献 III

- [8] Richard Kaye, Models of Peano Arithmetic, Oxford University Press,1991.
- [9] 田中 一之, 数学基礎論序説 数の体系への論理的アプローチ, 裳華房,2019.
- [10] Damir D. Dzhafarov, Carl Mummert ,Reverse Mathematics:Problems, Reductions, and Proofs.Springer Cham 2022