パリス・ハーリントン原理と金森・マカルーン原理が PA から独立であることのモデル理論的証明

橋本航気

2022 年 2 月 26 日

概要

パリス・ハーリントン原理と金森・マカルーン原理とよばれるラムゼー型の組合せ論的命題を https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/Nsettheory.pdf と同様の方法でコード化し，それらが独立であることを対角識別不可能集合や指標とよばれるモデル理論の道具を用いて Kaye [1] に沿って証明する．

目次

1 前提知識

Kaye [1] を 9 章まで読んでいる読者を想定しているが，ここで用いられている知識は，Sat_{Δ_0} の構成とパリス・ハーリントン原理などのコード化の方法以外は容易に確認できる．いま挙げた二つについては筆者のホームページに pdf がある．

2 指標を用いた独立性の証明手法

この節では本稿で独立性を証明する際に最も中心的な役割を果たす “指標” を定義する．大雑把に説明すると “指標” とは 2 変数関数であって，ある性質を満たす始切片の探知機と思える．先取りになるが，それは超準モデル $M \models PA$ において $Y(a,b)$ が超準元であるときにその a,b の間に都合のよい始切片があることを，逆に $Y(a,b)$ が標準元であるときにはそのような始切片がないことを我々に伝えてくれる．

定義 2.1. $I \subseteq_e M \models PA^-$ について，$b \in M \backslash I$ を $I < b$ と表記する．

この表記法は始切片について次が成り立つことに由来する．

$$b \in M \backslash I \Leftrightarrow \text{全ての } x \in I \text{ について } M \models x < b.$$

$\mathbb{N}$ は常に PA^- の超準モデルの真の始切片であるので，この表記法は超準元 $a \in M$ を $\mathbb{N} < a$ と書いていたことの一般化である．

定義 2.2. $Y(x, y)$ は以下の条件を満たすとき，PA において性質 Q のための良く振る舞う指標 (*well-behaved indicator*) とよぶ．

(a) $Y(x, y) = z$ が $\mathscr{L}_A$ の Σ_1 論理式であって x, y, z のみを自由変数に持つ．
(b) $PA \vdash \forall x, y \exists! z Y(x, y) = z$
(c) $PA \vdash \forall x, y Y(x, y) \leq y$
(d) $PA \vdash \forall x, y, x', y'(x' \leq x \land y \leq y' \to Y(x, y) \leq Y(x', y'))$
(e) 任意の超準モデル $M \models PA$ と任意の $a, b \in M$ に対し，

$$Y(a, b) > \mathbb{N} \Leftrightarrow \text{ある } I \subseteq_e M \text{ が存在し，} a \in I < b \text{ かつ } I \text{ は性質 } Q \text{ を持つ．}$$

系 2.3 (Kaye [1] corollary2.8)**.** $\mathscr{L}_A$ の構造 M, N が $M \subseteq_e N$ であるとする．このとき，任意の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\psi(\overline{x})$ に対し次が成り立つ．任意の $\overline{a} \in M$ に対し，

$(a)\Sigma_1$ 論理式の上方絶対性 $M \models \varphi(\overline{a}) \Rightarrow N \models \varphi(\overline{a})$
$(b)\Pi_1$ 論理式の下方絶対性 $N \models \psi(\overline{a}) \Rightarrow M \models \psi(\overline{a})$

定理 2.4 (Kaye [1] theorem14.3)**.** $Y(x, y)$ を PA において「PA を充足する」ための良く振る舞う指標とする．このとき次が成り立つ．

$$PA \nvdash \forall x, z \exists y Y(x, y) \geq z$$

証明. 超準モデル $M \models PA$ をとり，二つの超準元 $a, c \in M \backslash \mathbb{N}$ を $c < a$ を満たすようにとる．このとき，$M \models \exists y Y(a, y) \geq c$ と仮定してよい．なぜなら，さもなくば $M \models \exists x, z \neg \exists y Y(x, y) \geq z$ すなわち $M \models \neg \forall x, z \exists y Y(x, y) \geq z$ となり証明が終了するからである．

すると最小値原理によって $M \models Y(a, b) \geq c$ を満たす最小の $b \in M$ が存在する．c が超準元で $Y(x, y)$ は始切片が PA を充足するための指標であったことを思い出すと，$a \in I < b$ かつ $I \models PA$ を満たす始切片 $I \subseteq_e M$ が存在する．$c < a$ だったので $c \in I$ であり，もし仮にある $d \in I(< b)$ によって $I \models Y(a, d) \geq c$ が成り立つとすると，$I \subseteq_e M$ と系 2.3 から $M \models Y(a, d) \geq c$ となり b の最小性に矛盾する．したがって $I \not\models \exists y Y(a, y) \geq c$ が成り立つ． □

さて，我々の目標は次を満たす数学的に有意味な $\mathscr{L}_A$ 文 S を見つけることであった[*1]．

$$\mathbb{N} \models \mathrm{S} \text{ かつ } PA \nvdash \mathrm{S}$$

[*1] $\mathbb{N} \models \mathrm{S}$ から $PA \nvdash \neg S$ が出る．

先の定理 2.4 は特に $PA \nvdash \mathrm{S}$ を示すための一つの方法を提供している．実際，PA を充足するための良く振る舞う指標 $Y(x,y)$ を具体的に構成できたとすると，

$$PA + \mathrm{S} \vdash \forall x, z \exists y Y(x,y) \geq z$$

を示すことによって定理 2.4 から $PA \nvdash \mathrm{S}$ が結論できる．

とはいえ，良く振る舞う指標の定義 (e) は他の (a) から (d) と比べて厳しい条件である．(a) から (d) までの条件なら例えば $Y_1(x,y) = y - x$ という単純な関数ですら条件を満たすが，$Y_1(a,b) > \mathbb{N}(a, b \in M \models PA)$ であったとしても a から b の間に始切片が取れるとは限らない．始切片は和と積に閉じるので，$a \in I < b$ という条件は a と b の間にかなりの差があることを要求するのである．

逆に条件 (e) をも満たす関数として，例えば $Y_2(x,y) = \lfloor \log_{x+2}(y) \rfloor$[*2]は PA において「始切片である」ための良く振る舞う指標になる．今回 (e) の条件において性質 Q として要求するのは「PA を充足する」ことなので，この 2 節の残りは PA を満たす始切片を構成する方法の開発に注力する．

定義 2.5. $M \models I\Delta_0, a < b \in M$ で $c \in M$ が $\mathrm{len}(c) = \delta > \mathbb{N}$ で

$$[c]_i^2 < [c]_{i+1} \ (\forall i \in \mathbb{N}) \quad \& \quad a \leq [c]_0 < [c]_1 < \cdots < [c]_\delta \leq b$$

を満たすとする．この条件のもとで

$$I = \{\, x \in M \mid \text{ある } i \in \mathbb{N} \text{ で } M \models x < [c]_i \,\} \tag{2.1}$$

が次を満たすとき，I は (c に関して)truth definition を持つという．

任意の $\overline{a} \in I$ と任意の Δ_0 論理式 $\theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{y})$ について，$i \in \mathbb{N}$ で $\overline{a} < [c]_i$ となるなら，以下二つが同値になる．

- $I \models \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \ldots Q x_k \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a})$
- $M \models \exists x_1 < [c]_{i+1} \forall x_2 < [c]_{i+2} \exists x_3 < [c]_{i+3} \ldots Q x_k < [c]_{i+k} \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a})$

ここで Q は $\forall$ または $\exists$ である．

補題 2.6. 先の定義 2.5 において式 (2.1) の I が truth definition を持つなら $I \models PA$ である．

証明. まず I は（M の）和と積に閉じることから $\mathscr{L}_A$ 構造と見なせる．このとき $I \subseteq_e M \models PA$ より $I \models PA^-$ なので，あとは I がすべての論理式に関する最小値原理を充足することを確認すればよい．任意に $\mathscr{L}_A$ 論理式 $\psi(x, \overline{y})$ と $\overline{a} \in I$ を取り $I \models \exists x \psi(x, \overline{a})$ と仮定する．ψ はある Δ_0 論理式 θ と $k \in \mathbb{N}$ によって

$$\forall y_1 \exists y_2 \cdots Q y_k \theta(x, y_1, \ldots, y_k, \overline{a})$$

[*2] 形式的には $Y_2(x,y) = z \leftrightarrow (x+2)^z \leq y < (x+2)^{z+1}$

と書ける．よって $I \models \exists x \forall y_1 \exists y_2 \cdots Q y_k \theta(x, y_1, \ldots, y_k, \overline{a})$ であり，$i \in \mathbb{N}$ が $\overline{a} < [c]_i$ を満たすとすると truth definition から

$$M \models \exists x < [c]_{i+1} \forall y_1 < [c]_{i+2} \exists y_2 < [c]_{i+3} \cdots Q y_k < [c]_{i+k+1} \theta(x, y_1, \ldots, y_k, \overline{a})$$

が成り立ち，M において最小値原理を使うことで以下を満たす最小の $e < [c]_{i+1}$ が存在する．

$$M \models \forall y_1 < [c]_{i+2} \exists y_2 < [c]_{i+3} \cdots Q y_k < [c]_{i+k+1} \theta(e, y_1, \ldots, y_k, \overline{a}) \tag{2.2}$$

この $e \in M$ が I においても $\psi(x, \overline{a})$ を成り立たせる最小の元であることを示す．まず I の定義から $e \in I$ であり，$e, \overline{a} < [c]_{i+1}$ と式 (2.2) 及び truth definition より $I \models \psi(e, \overline{a})$ は成り立つ．もし仮に $x' < e$ なる $x' \in I$ で $I \models \psi(x', \overline{a})$ が成り立ったとする．このとき $x', \overline{a} < [c]_{i+1}$ であるので再び truth definition から

$$M \models \forall y_1 < [c]_{i+2} \exists y_2 < [c]_{i+3} \cdots Q y_k < [c]_{i+k+1} \theta(x', y_1, \ldots, y_k, \overline{a})$$

となり $e \in M$ の最小性に矛盾する．ゆえに

$$I \models \forall \overline{a} (\exists x \psi(x, \overline{a}) \to \exists x (\psi(x, \overline{a}) \land \forall x' < x \neg \psi(x', \overline{a})))$$

が結論できる． □

命題 2.7. 先の定義 2.5 にある式 (2.1) の I に関して次の (1)(2)(3) は同値

(1) I が (c に関して) truth definition を持つ．

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ と k 個の任意の正整数 $(0 <) n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k$ および任意の Δ_0 論理式 θ に対し，$\overline{a} < [c]_{n_1 - 1}$ となるすべての $\overline{a} \in M$ について次が成り立つ．

$$\begin{aligned} & I \models \exists x_1 \forall x_2 \cdots Q x_k \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a}) \\ \Leftrightarrow & M \models \exists x_1 < [c]_{n_1} \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_k < [c]_{n_k} \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a}) \end{aligned}$$

(3) 任意の $k \in \mathbb{N}$ と $2k$ 個の任意の正整数 $(0 <) n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k$ と $(0 <) m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_k$ および任意の Δ_0 論理式 θ に対し，$\overline{a} < \min([c]_{n_1 - 1}, [c]_{m_1 - 1})$ となるすべての $\overline{a} \in M$ について次が成り立つ．

$$\begin{aligned} & M \models \exists x_1 < [c]_{n_1} \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_k < [c]_{n_k} \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a}) \\ \Leftrightarrow & M \models \exists x_1 < [c]_{m_1} \forall x_2 < [c]_{m_2} \cdots Q x_k < [c]_{m_k} \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a}) \end{aligned}$$

証明. (1) は (2) の特殊な場合なので (2) ⇒ (1) は明らか．(2) ⇒ (3) も (2) を二回使えばよいだけである．

(1) ⇒ (2)

k に関する帰納法で示す．$k=1$ なら自明．$\theta \in \Delta_0$，$\overline{a} < [c]_{n_1-1}$ とし，

$$
\begin{aligned}
&M \models \exists x_1 < [c]_{n_1} \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_{(k+1)}} \theta(x_1, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \\
\Rightarrow &[c]_{n_1} > b \in M \models \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_{(k+1)}} \theta(b, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \\
\Rightarrow &I \models \forall x_2 \cdots Q x_{k+1} \theta(b, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \qquad (\because b, \overline{a} < [c]_{n_1} \leq [c]_{n_2-1} \text{と帰納法の仮定}) \\
\Rightarrow &M \models \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_2+(k-1)} \theta(b, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \qquad (\because \text{truth definition}) \\
\Rightarrow &M \models \exists x_1 < [c]_{n_2-1} \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_2+(k-1)} \theta(x_1, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \\
\Rightarrow &I \models \exists x_1 \forall x_2 \cdots Q x_{k+1} \theta(x_1, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \qquad (\because \overline{a} < [c]_{n_1-1} \leq [c]_{(n_2-1)-1}, truth\ def) \\
\Rightarrow &M \models \exists x_1 < [c]_{n_1} \forall x_2 < [c]_{n_1+1} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_1+k} \theta(x_1, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \qquad (\because \overline{a} < [c]_{n_1-1}, \text{truth definition}) \\
\Rightarrow &[c]_{n_1} > d \in M \models \forall x_2 < [c]_{n_1+1} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_1+k} \theta(d, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \\
\Rightarrow &I \models \forall x_2 \cdots Q x_{k+1} \theta(d, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \quad (\because \overline{a}, d < [c]_{n_1}, \text{truth definition}) \\
\Rightarrow &M \models \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_{(k+1)}} \theta(d, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a}) \qquad (\because [c]_{n_1} \leq [c]_{n_2-1}, \text{帰納法の仮定}) \\
\Rightarrow &M \models \exists x_1 < [c]_{n_1} \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_{(k+1)}} \theta(x_1, \ldots, x_{(k+1)}, \overline{a})
\end{aligned}
$$

(3) $\Rightarrow$ (2)

k に関する帰納法で示す．$k=1$ のとき，$0 < n_1$，$\theta \in \Delta_0$，$\overline{a} < [c]_{n_1-1}$ とすると

$$
\begin{aligned}
&I \models \exists x_1 \theta(x_1, \overline{a}) \\
&\Rightarrow \text{ある } j > n_1 \text{と } [c]_j > b \in I \text{ で } I \models \theta(b, \overline{a}) \\
&\Rightarrow M \models \theta(b, \overline{a}) \\
&\Rightarrow M \models \exists x < [c]_j \theta(x, \overline{a}) \\
&\Rightarrow M \models \exists x < [c]_{n_1} \theta(x, \overline{a}) \qquad (\because \overline{a} < \min([c]_{n_1-1}, [c]_{j-1}), (3)) \\
&\Rightarrow I \models \exists x_1 \theta(x_1, \overline{a}) \qquad (\because [c]_{n_1} \in I)
\end{aligned}
$$

次に $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_{(k+1)}$ と $\theta \in \Delta_0$，$\overline{a} < [c]_{n_1-1}$ について

$$
\begin{aligned}
&I \models \exists x_1 \forall x_2 \cdots Q x_{k+1} \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a}) \\
&\Rightarrow \text{ある } j > n_1 \text{と } [c]_j > b \in I \text{ で } I \models \forall x_2 \cdots Q x_{k+1} \theta(b, \ldots, x_k, \overline{a}) \\
&\Rightarrow M \models \forall x_2 < [c]_{j+1} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{j+k} \theta(b, \ldots, x_k, \overline{a}) \qquad (\because \overline{a}, b < [c]_j, \text{帰納法の仮定}) \\
&\Rightarrow M \models \exists x_1 < [c]_j \forall x_2 < [c]_{j+1} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{j+k} \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a})
\end{aligned}
$$

ここで $\overline{a} < \min([c]_{n_1-1}, [c]_{j-1})$ であり，$0 < j < j+1 < \cdots < j+k$ および $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_{(k+1)}$ について (3) を適用することで

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow M \models \exists x_1 < [c]_{n_1} \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_{(k+1)}} \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a}) \\
&\Rightarrow [c]_{n_1} > b \in M \models \forall x_2 < [c]_{n_2} \cdots Q x_{k+1} < [c]_{n_{(k+1)}} \theta(b, \ldots, x_k, \overline{a}) \\
&\Rightarrow I \models \forall x_2 \cdots Q x_{k+1} \theta(b, \ldots, x_k, \overline{a}) \qquad (\because \overline{a}, b < [c]_{n_1} \leq [c]_{n_2-1}\text{，帰納法の仮定}) \\
&\Rightarrow I \models \exists x_1 \forall x_2 \cdots Q x_{k+1} \theta(x_1, \ldots, x_k, \overline{a})
\end{aligned}
$$

□

定義 2.8. Γ を言語 $\mathscr{L}$ の論理式の集合とする．$\mathscr{L}$ のモデル M の部分集合である線形順序集合 $(I, <)(I \subseteq |M|)$ が与えられているとして，$J \subseteq I$ とする．

Γ に属する任意の論理式 $\varphi(y, x_1, ..., x_n)$ と任意の $p \in I$，及び

$$\begin{aligned} p < c_0 < c_1 < \cdots < c_n \\ c_0 < d_1 < \cdots < d_n \end{aligned}$$

を満たす任意の狭義単調増加列 $\{c_i\}_{i \le n}, \{d_i\}_{i \le n} \subseteq J$ に対し

$$M \models \varphi(p, c_1, ..., c_n) \leftrightarrow \varphi(p, d_1, ..., d_n)$$

が成り立つとき，J は M の (I, Γ)- 対角識別不能集合 ((I, Γ)-*diagonal indiscernibles*) という．（M にも全順序構造があるとして）$I = |M|$ のときや Γ がすべての論理式であるようなときは (I, Γ)- はそれぞれ省略される．

補題 2.9. $M \models I\Delta_0, a < b \in M$ とし，$H \in M$ が[*3]$\mathrm{len}(H) = 2e + 1 > \mathbb{N}$ で

$$a \le [H]_0 < [H]_1 < \cdots < [H]_{2e} \le b$$

を満たすと仮定し，さらに $\{[H]_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ は M の Δ_0- 対角識別不能集合であるとする．このとき，

$$I = \{\, x \in M \mid \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ で } M \models x < [H]_{2n} \,\}$$

は PA を充足する M の始切片である．また明らかに $a \in I < b$ でもある．

証明. <u>Claim1:</u> 任意の c_0，$c_1 \in \{[H]_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対し，$c_0 < c_1$ ならすべての $n \in \mathbb{N}$ について $c_0^n < c_1$．

$$\underbrace{\overbrace{x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots}^{\{[H]_i\}_{i\in\mathbb{N}}} < \wr < \cdots < x_{e-1} < x_e < \underbrace{x_{e+1} < \cdots < x_{2e}}_{\mathbb{N}<e\ \text{個}}}_{H}$$

c_0，c_1 の他にあと三つ c_2，c_3，$c_4 \in \{[H]_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ を満たすように任意にとる．次を順番に示していけばよい．

(1) $c_0 + c_1 \le c_2$
(2) $c_1 + c_2 \le c_3$
(3) $c_0 \cdot c_1 < c_2$
(4) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $[c_0^n < c_1$ ならば $c_0^{n+1} < c_1]$

(1) 背理法で示す．$c_0 + c_1 > c_2$ とすると，$p + c_1 = c_2$ を満たす $M \ni p < c_0$ が存在する．このとき $\{[H]_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の Δ_0- 対角識別不能性から

$$M \models p + c_1 = c_2 \leftrightarrow p + c_1 = c_3$$

[*3] H は M の部分集合ではなく元なので小文字で書くのが通例だが，ここでは H の性質を考慮して大文字を用いている．

が成り立つ．いま $p+c_1=c_2$ であるから同時に $M\models p+c_1=c_3$ も成り立ち，$c_2=c_3$ が導かれるがこれは矛盾である．

(2) 先と同様に背理法で示す．$c_1+c_2>c_3$ とすると，$p+c_2=c_3$ を満たす $p<c_1$ が存在する．このとき $M\models p+c_2=c_3\leftrightarrow p+c_2=c_4$ となり先と同様矛盾する．

(3) 先と同様に背理法で示す．$c_0\cdot c_1\geq c_2$ とすると，$p\cdot c_1<c_2\leq(p+1)c_1$ を満たす $p<c_0$ が存在する．あとは同様に $c_3\leq(p+1)c_1$ が成り立ち，

$$(p+1)c_1=pc_1+c_1<c_2+c_1\leq c_3\leq(p+1)c_1$$

が導かれて矛盾する．

(4)

$$c_0^{n+1}=c_0\cdot c_0^n<c_0\cdot c_1<c_2$$

すなわち $c_0^{n+1}<c_2$ であるので，論理式 $(\mathsf{v}_0+1)^{n+1}<\mathsf{v}_1$ を考えることで (1) と同様の議論で $c_0^{n+1}<c_1$ を得る．Claim1 の証明終わり．

最後に $M\models\mathrm{len}(c)=e+1\wedge\forall i<e+1([c]_i=[H]_{2i})$ なる c を取り[*4]，これが求める性質，つまり以下の Claim を満たすことを示す．

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} x_0 & < x_1 & < x_2 & <\cdots< & x_n & <\cdots< & \wr & <\cdots< & x_{e-1} & < x_e & < x_{e+1} & <\cdots< & x_{2e} \\ [c]_0 & & [c]_1 & & & & & & \cdots & & & & [c]_e \end{array}$$

<u>Claim2:</u> $I=\{\,x\in M\mid$ ある $i\in\mathbb{N}$ で $M\models x<[c]_i\,\}$ は truth definition を持つ．

まず $[c]_i^2<[c]_{i+1}(i\in\mathbb{N})$ は Claim1 から明らかに成り立つ．命題 2.7(3) を導けばよい．$k\in\mathbb{N}$ とし，正整数 $n_1<n_2<\cdots<n_k$，$m_1<m_2<\cdots<m_k$ および Δ_0 論理式 θ と $\overline{a}<\min([c]_{n_1-1},[c]_{m_1-1})$ を任意にとる．このとき，以下の論理式

$$\exists x_1<\mathsf{v}_1\forall x_2<\mathsf{v}_2\cdots Qx_k<\mathsf{v}_k(\exists y_1,\dots,y_n<\mathsf{v}_0(\langle y_1,\dots,y_n\rangle=\mathsf{v}_0\wedge\theta(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)))$$

も Δ_0 である．いま $[c]_{n_1-1}\leq[c]_{m_1-1}$(つまり $n_1\leq m_1$) と仮定しても一般性は失わない．このときある $l\in\mathbb{N}$ で $\langle\overline{a}\rangle\leq\max(\overline{a})^l<[c]_{n_1-1}^l$ となり，Claim1 より

$$[c]_{n_1-1}^l=[H]_{2(n_1-1)}^l<[H]_{2(n_1-1)+1}<[H]_{2n_1}=[c]_{n_1}\leq[c]_{m_1}$$

となっている．よって p として $\langle\overline{a}\rangle$，$c_0$ として $[H]_{2(n_1-1)+1}$ の場合を考えれば $\{[H]_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ の Δ_0-対角識別不能性から

$$\begin{aligned} M\models\ &\exists x_1<[c]_{n_1}\forall x_2<[c]_{n_2}\cdots Qx_k<[c]_{n_k}(\exists y_1,\dots,y_n<\langle\overline{a}\rangle\,(\langle y_1,\dots,y_n\rangle=\langle\overline{a}\rangle\wedge\theta(\overline{x},\overline{y})))\\ \leftrightarrow\ &\exists x_1<[c]_{m_1}\forall x_2<[c]_{m_2}\cdots Qx_k<[c]_{m_k}(\exists y_1,\dots,y_n<\langle\overline{a}\rangle\,(\langle y_1,\dots,y_n\rangle=\langle\overline{a}\rangle\wedge\theta(\overline{x},\overline{y})))\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} &M\models\exists x_1<[c]_{n_1}\forall x_2<[c]_{n_2}\cdots Qx_k<[c]_{n_k}\theta(\overline{x},\overline{a})\\ \Leftrightarrow &M\models\exists x_1<[c]_{m_1}\forall x_2<[c]_{m_2}\cdots Qx_k<[c]_{m_k}\theta(\overline{x},\overline{a})\end{aligned}$$

[*4] c の長さは超準ならどれだけ短くとも問題ない．

を得る． $\square$

したがって PA を充足する始切片を得るためには，超準長さの列で標準自然数添え字の部分が対角識別不能集合をなすものを構成すればよいことが分かった．

3 パリス・ハーリントン原理および金森・マカルーン原理の PA からの独立性

この節では Kaye [1] に沿ってパリス・ハーリントン原理および金森・マカルーン原理それぞれから PA を充足するための指標を作り独立性を証明する．筆者の理解不足かも知れないが，Kaye [1] にある指標の定義ではうまく証明が回らないと思われる箇所があるので一部定義を変更している．

また，以下の命題のコード化については https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/Nsettheory.pdf を参照せよ．

定義 3.1. 次の $\mathscr{L}_A$ 論理式を $[x,y] \underset{*}{\to} (k)^n_c$ と書く．

$$\forall f\{(f\colon {}_c[[x,y]]^n \to c) \to \exists d < c \exists H \subseteq_i [x,y][\mathrm{card}_c(H) \geq \max(k, \min{}_c(H)) \wedge \underbrace{\forall\{x_1,...,x_n\} \in_c [H]^n(f(x_1,...,x_n) = d)]}_{H\text{ が }f\text{ に関して均質}}\}$$

定義 3.2. 次の $\mathscr{L}_A$ 論理式を $[x,y] \to (k)^n_{reg}$ と書く．

$$\forall f[f\colon {}_c[[x,y]]^n \to y \wedge \overbrace{\forall\{x_1,...,x_n\} \in_c [[x,y]]^n(f(x_1,...,x_n) < x_1)}^{f\text{ が後退的}} \to \exists H \subseteq_i [x,y][\mathrm{card}_c(H) = k \wedge \underbrace{\forall\{x_1,...,x_n\},\{y_1,...,y_n\} \subseteq_i [H]^n(x_0 = y_0 \to f(x_1,...,x_n) = f(y_1,...,y_n))]]}_{H\text{ が }f\text{ に関して頭均質}}$$

有限ラムゼーの場合と同様にそれぞれ $\Delta_1(I\Sigma_1)$ であることが分かる．また $[x,y] \to (k)^n_{reg}$ は考える関数の定義域の位置は有限ラムゼー同様問題にはならない．この事実の証明も有限ラムゼーの場合と同様にできる．一方で $[x,y] \underset{*}{\to} (k)^n_c$ において定義域の位置は本質的な条件である．なぜなら，この主張において均質な集合の濃度はその最小値以上である必要があり，最小値は定義域に依存するからである．

定義 3.3. $\mathscr{L}_A$ 文 (PH)，(KM) を以下で定める．

$$(PH) \leftrightarrow \forall x,z,n,c \exists y([x,y] \underset{*}{\to} (z)^n_c)$$
$$(KM) \leftrightarrow \forall x,z,n \exists y([x,y] \to (z)^n_{reg})$$

この節ではここで定めた (PH) と (KM) が $\mathbb{N}$ で成り立ち，一方で PA からは証明されないことを示してそれぞれが PA の独立命題であることを結論することが目標である．

注 3.4. $f\colon {}_c[[x,y]]^n \to c$ なる写像が存在しない場合（例えば $y-x+1<n$ かつ $c \geq 1$ のとき）は自明に $[x,y] \underset{*}{\to} (z)^n_c$ が成立する．他にも $[[x,y]]^0=\{\varnothing\}$ や $[[x,y]]^n=\varnothing$ になる場合も容易に成立・不成立が確かめられる．$[x,y] \to (k)^n_{reg}$ についても同様のことがいえる．

次に簡単な性質をいくつか確認しておく．

命題 3.5. $[x,y] \underset{*}{\to} (z)^n_c$ について次が成り立つ．

$$I\Sigma_1 \vdash \forall x,x',y,y',z,z',c,c',n([x,y] \underset{*}{\to} (z)^n_c \wedge x' \leq x \wedge y \leq y' \wedge z' \leq z \wedge c' \leq c \\ \to [x',y'] \underset{*}{\to} (z')^n_{c'})$$

証明. $f\colon {}_c[[x',y']]^n \to c'$ を満たす f は $x' \leq x, y \leq y', c \leq c'$ について $f\colon {}_c[[x,y]]^n \to c$ でもあることから分かる． □

直感的には，定義域はいつでも広げられて，彩色数は適当に減らすことができ，対応して存在する集合の濃度の条件は自由に弱くしてよいことが分かる．同様のことが $[x,y] \to (z)^n_{reg}$ についても成り立つ．

命題 3.6. $[x,y] \to (z)^n_{reg}$ について次が成り立つ．

$$I\Sigma_1 \vdash \forall x,x',y,y',z,z',n([x,y] \to (z)^n_{reg} \wedge x' \leq x \wedge y \leq y' \wedge n \leq z' \leq z \\ \to [x',y'] \to (z')^n_{reg})$$

補題 3.7 (Kaye [1] lemma14.12)**.** $a,b,d,e \in M \models PA$ とし，$\mathbb{N} < 2e+1 < a < b$ で

$$M \models [a,b] \to (d)^{2e+1}_{reg} \wedge d \to (3e+1)^{2e+1}_{e+2}$$

が成り立つと仮定する．このとき，$I \models PA$ および $a \in I < b$ を満たす M の始切片 I が存在する．

証明. まず Δ_0 論理式（のゲーデル数）をゲーデル数が小さい順に枚挙してくるような PA 上可証再帰的な関数 $\mathrm{Emu}\Delta_0$ は以下で定めることができる．

$$\mathrm{Emu}\Delta_0(n)=y \leftrightarrow \\ \exists w[\forall x<(w)_0 \neg \mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \wedge \forall i<n-1((w)_i<(w)_{i+1}) \\ \wedge \forall i<\mathrm{len}(w)(\mathrm{form}_{\Delta_0}((w)_i)) \wedge \forall i<n(\forall x<(w)_{i+1}(x>(w)_i \to \neg \mathrm{form}_{\Delta_0}(x)) \wedge y=(w)_n)]$$

この関数の well-defined 性の証明は命題 3.21 と同様であるのでここでは省略する．可読性を考慮し $\mathrm{Emu}\Delta_0(i)$ は $\ulcorner\psi_i\urcorner$ と書くことにする．$e \in M$ は超準元なので任意の標準 Δ_0 論理式はある $i \in \mathbb{N}$ によって $\psi_i(\mathsf{v}_0,\mathsf{v}_1,\ldots,\mathsf{v}_e)$（自由変数は現れているもののみを持つ）と書くことができる．ここでさらに二つの関数 $f\colon {}_c[[a,b]]^{2e+1} \to b$ および $i\colon {}_c[[a,b]]^{2e+1} \to e+1$ を次で定める．

与えられた $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2e} \leq b$ なる $x_0,\ldots,x_{2e}$ について，$f(x_0,x_1,\ldots,x_{2e})$ は

$$p < x_0 \wedge \exists i \leq e[\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_i\urcorner,[p,x_1,\ldots,x_e]) \not\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_i\urcorner,[p,x_{e+1},\ldots,x_{2e}]] \tag{3.1}$$

[*5]を満たす p が存在する場合はこれを満たす最小の p とし，存在しない場合は 0 とする．次に

*5 $A \not\leftrightarrow B$ は $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (\neg A \leftrightarrow B)$ の略記．

$i(x_0,\dots,x_{2e})$ は，式 (3.1) を満たす p が存在しない場合[*6]は $e+1$ とし，存在するなら

$$i \le e \wedge [\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_i\urcorner,[f(x_0,\dots,x_{2e}),x_1,\dots,x_e]) \not\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_i\urcorner,[f(x_0,\dots,x_{2e}),x_{e+1},\dots,x_{2e}]]$$

を満たす最小の i とする．明らかに任意の $a \le x_0 < \cdots < x_{2e} \le b$ について $f(x_0,\dots,x_{2e}) < x_0$ であるので，$M \models [a,b] \to (d)^{2e+1}_{reg}$ より $M \models H_0 \subseteq_i [a,b] \wedge \mathrm{card}_c(H_0) = d$ を満たし，f に関して頭均質である H_0 が存在する．つまり f は H_0 の $2e+1$ 個組については第一引数にしか依存しない．次に i は値域が $e+2$ であるので，$M \models d \to (3e+1)^{2e+1}_{e+2}$ の仮定より $M \models H_1 \subseteq_i H_0 \wedge \mathrm{card}_c(H_1) = 3e+1$ を満たす i について均質な H_1 が存在する．よって $x_0 < x_1 < \cdots < x_{2e}$ が $[H_1]^{2e+1}$ の元ならば $i(x_0,x_1,\dots,x_{2e})$ は一定の値 $i_0(\le e+1)$ を取る．

Claim1: $i_0 = e+1$

$i \le e$ だと仮定する．いま $\mathrm{card}_c(H_1) = 3e+1$ なので H_1 は

$$x_0 < \underbrace{x_1 < \cdots < x_e}_{e\text{ 個}} < \underbrace{x_{e+1} < \cdots < x_{2e}}_{e\text{ 個}} < \underbrace{x_{2e+1} < \cdots < x_{3e}}_{e\text{ 個}} \tag{3.2}$$

となっている．i が H_1 上で均質であることから

$$\begin{aligned} i_0 &= i(x_0,x_1,\dots,x_e,x_{e+1},\dots,x_{2e}) &(3.3)\\ &= i(x_0,x_1,\dots,x_e,x_{2e+1},\dots,x_{3e}) &(3.4)\\ &= i(x_0,x_{e+1},\dots,x_{2e},x_{2e+1},\dots,x_{3e}) &(3.5)\end{aligned}$$

であり，また f も $H_0(\supseteq_i H_1)$ 上で頭均質なので，ある $p_0 \in M$ によって

$$\begin{aligned} p_0 &= f(x_0,x_1,\dots,x_e,x_{e+1},\dots,x_{2e}) &(3.6)\\ &= f(x_0,x_1,\dots,x_e,x_{2e+1},\dots,x_{3e}) &(3.7)\\ &= f(x_0,x_{e+1},\dots,x_{2e},x_{2e+1},\dots,x_{3e}) &(3.8)\end{aligned}$$

が成り立つ．いま $i_0 \le e$ という背理法の仮定から f, i はいずれも例外の値ではない，つまり例えば $x_0,x_1,\dots,x_{2e}$ について式 (3.6) から

$$p < x_0 \wedge \exists i \le e[\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_i\urcorner,[p,x_1,\dots,x_e]) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_i\urcorner,[p,x_{e+1},\dots,x_{2e}]]$$

を満たす p は存在し，そのような p で最小のものが p_0 である．また式 (3.3) から i_0 とは

$$i \le e \wedge [\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_i\urcorner,[p_0,x_1,\dots,x_e]) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_i\urcorner,[p_0,x_{e+1},\dots,x_{2e}]]$$

を満たす最小の i のことである．よって他の式 (3.7), (3.4), (3.8), (3.5) も合わせて次の三つが成り立つ．

$$\begin{aligned} \neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_{i_0}\urcorner,[p_0,x_1,\dots,x_e]) &\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_{i_0}\urcorner,[p_0,x_{e+1},\dots,x_{2e}]\\ \neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_{i_0}\urcorner,[p_0,x_1,\dots,x_e]) &\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_{i_0}\urcorner,[p_0,x_{2e+1},\dots,x_{3e}]\\ \neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_{i_0}\urcorner,[p_0,x_{e+1},\dots,x_{2e}]) &\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_{i_0}\urcorner,[p_0,x_{2e+1},\dots,x_{3e}]\end{aligned}$$

[*6] つまり $f(x_0,x_1,\dots,x_{2e}) = 0$ の場合

すると $M \models \neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_{i_0}\urcorner, [p_0, x_{e+1}, \ldots, x_{2e}]) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_{i_0}\urcorner, [p_0, x_{e+1}, \ldots, x_{2e}])$ が導かれて矛盾が生じる．Claim の証明終わり．

次に $H := H_1 \upharpoonright (2e+1)$ とする．つまり，H とは式 (3.2) の x_{2e} までの列である．

$$\underbrace{x_0 < \underbrace{x_1 < \cdots < x_e}_{e\text{ 個}} < \underbrace{x_{e+1} < \cdots < x_{2e}}_{e\text{ 個}}}_{H} < \underbrace{x_{2e+1} < \cdots < x_{3e}}_{e\text{ 個}}$$

<u>Claim2:</u> 以下 (*) が成り立つ．

$$(^*)\begin{Bmatrix} H\text{ の任意の } c_0 < c_1 < \cdots < c_e,\ c_0 < d_1 < \cdots < d_e \text{ に対し以下が成り立つ．} \\ M \models \forall p < c_0 \forall j \leq e[\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, c_1, \ldots, c_e]) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, d_1, \ldots, d_e])] \end{Bmatrix}$$

H から $e+1$ 個の c_i たちと e 個の d_i たちを条件を満たすように取る．このとき H の定義から

$$c_0 < c_1 < \cdots < c_e < x_{2e+1} < \cdots < x_{3e} \text{ および } c_0 < d_1 < \cdots < d_e < x_{2e+1} < \cdots < x_{3e}$$

であるので，Claim1 と i の定義から

$$\forall p < c_0 \forall j \leq e \neg[\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, c_1, \ldots, c_e]) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, x_{2e+1}, \ldots, x_{3e}]]$$

$$\forall p < c_0 \forall j \leq e \neg[\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, d_1, \ldots, d_e]) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, x_{2e+1}, \ldots, x_{3e}]]$$

が成り立つ．よって先の二式は以下のように整理できる．

$$\begin{aligned} \forall p < c_0 \forall j \leq e[\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, c_1, \ldots, c_e]) &\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, x_{2e+1}, \ldots, x_{3e}] \\ &\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\psi_j\urcorner, [p, d_1, \ldots, d_e])] \end{aligned}$$

Claim2 の証明終わり．

したがって $\{[H]_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は Δ_0- 対角識別不可能集合であるので，補題 2.9 より

$$I = \{\, x \in M \mid \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ で } M \models x < [H]_{2n} \,\}$$

は条件を満たす始切片である．

□

補題 3.8 (Kaye [1] lemma14.13).

$$PA \vdash \forall a, k, e, b([[a+e, b] \underset{*}{\to} (e+k)_3^{e+1}] \to [[a, b] \to (k)_{reg}^e])$$

したがって特に

$$PA \vdash (PH) \to (KM)$$

が成り立つ．

証明. 自明な場合を除くために $k \geq e \geq 2$ としてよい．後退的な $f\colon {}_c[[a,b]]^e \to b$ を任意にとる．このとき，$g'\colon {}_c[[a+e,b]]^{e+1} \to 3$ を以下で定める．

$$g'(x_0,x_1,...,x_e) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x_0-e,x_1-e,...,x_{e-1}-e) = f(x_0-e,x_2-e,...,x_e-e) \\ 1 & \text{if } f(x_0-e,x_1-e,...,x_{e-1}-e) < f(x_0-e,x_2-e,...,x_e-e) \\ 2 & \text{if } f(x_0-e,x_1-e,...,x_{e-1}-e) > f(x_0-e,x_2-e,...,x_e-e) \end{cases}$$

ここで $[a+e,b] \underset{*}{\to} (e+k)^{e+1}_3$ から，g' に関して均質な $H' \subseteq_i [a+e,b]$ で $\mathrm{card}_c(H') \geq \max(e+k, \min{}_c(H'))$ となるものが存在する．すると以下で定める関数 $g\colon {}_c[[a,b]]^{e+1} \to 3$

$$g(x_0,x_1,...,x_e) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x_0,x_1,...,x_{e-1}) = f(x_0,x_2,...,x_e) \\ 1 & \text{if } f(x_0,x_1,...,x_{e-1}) < f(x_0,x_2,...,x_e) \\ 2 & \text{if } f(x_0,x_1,...,x_{e-1}) > f(x_0,x_2,...,x_e) \end{cases}$$

に関して $H = \{\, h-e \mid h \in H' \,\}$ は均質である．いま H の濃度について

$$\mathrm{card}_c(H) = \mathrm{card}_c(H') \geq \max(e+k, \min{}_c(H')) \geq \max(e+2, \min{}_c(H)+e)$$

が成り立っているので，$x_0 = \min{}_c(H)$ とおくと H は以下のように枚挙される．

$$\underbrace{\overbrace{x_0 < x_1 < \cdots < x_{x_0-1}}^{x_0\text{個}} < \overbrace{x_{x_0} < \cdots < x_{x_0+e-1}}^{e\text{ 個}}}_{e+2\text{ 個以上}} < \cdots$$

<u>Claim1:</u> g は $[H]^{e+1}$ 上一定の値 0 をとる．

そうでないとする．まず g が $[H]^{e+1}$ 上 1 で一定であると仮定すると，g の定義と f が後退的であることから

$$\underbrace{f(x_0,x_1,...,x_{e-1}) < f(x_0,x_2,...,x_e) < \cdots < f(x_0,x_{x_0+1},...,x_{x_0+e-1})}_{x_0+1\text{ 個}} < x_0$$

となり矛盾が生じる．g が $[H]^{e+1}$ 上 2 でも同様の矛盾が生じる． Claim1 の証明終わり．

H_0 を H の前 $k(\geq e)$ 個の要素からなる集合とし，$z_1 < z_2 < \cdots < z_e$ を H の後ろ e 個とする．

$$\underbrace{\overbrace{x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1}}^{H_0} < \cdots \overbrace{< z_1 < z_2 < \cdots < z_e}^{e\text{ 個}}}_{H}$$

<u>Claim2:</u> H_0 は f に関して頭均質．

$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{e-1}$，$x_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{e-1}$ を H_0 から任意に取る．このとき，

$$\begin{aligned}
f(x_0, x_1, ..., x_{e-1}) &= f(x_0, x_1, x_2, ..., x_{e-1}, z_1) && (\because g(x_0, x_2, ..., x_{e-1}, z_1, z_2)) = 0 \\
&= f(x_0, x_2, x_3, ..., x_{e-1}, z_1, z_2) && (\because g(x_0, x_3, ..., x_{e-1}, z_1, z_2)) = 0 \\
&\vdots \\
&= f(x_0, x_{e-1}, z_1, ..., z_{e-2}) \\
&= f(x_0, z_1, ..., z_{e-1}) && (\because g(x_0, x_{e-1}, z_1, ..., z_{e-2}, z_{e-1})) = 0 \\
&= f(x_0, y_{e-1}, z_1, ..., z_{e-2}) \\
&\vdots \\
&= f(x_0, y_1, ..., y_{e-1})
\end{aligned}$$

Claim2，及び補題の証明終わり． □

定義 3.9. $n \in \mathbb{N}$ とする．(PH_n) と (KM_n) をそれぞれ以下で定める

$$(PH_n) \leftrightarrow \forall x, z \exists y[[x, y] \underset{*}{\to} (2z)^n_z]$$
$$(KM_n) \leftrightarrow \forall x, z \exists y[[x, y] \to (z)^n_{reg}]$$

命題 3.10. PA において各 $n \in \mathbb{N}$ について次が証明可能.

$$(PH_{n+1}) \Rightarrow \forall x, z \exists y[[x, y] \underset{*}{\to} (z)^{n+1}_3] \Rightarrow (KM_n)$$

証明.（前半）$x, z \in M \models PA + (PH_{n+1})$ とする．示すべきは $M \models \exists y[[x, y] \underset{*}{\to} (z)^{n+1}_3]$ である．

いま $z > 3$ と仮定してよい．なぜなら，$z = 0$ なら明らかで，$0 < z \leq 3$ なら仮定より $M \models [[x, y] \underset{*}{\to} (6)^{n+1}_3]$ を満たす $y \in M$ が存在し，この y が条件を満たすからである．実際，$f\colon {}_c[[x, y]]^{n+1} \to 3$ とすると，ある $H \subseteq [x, y]$ で $\mathrm{card}_c(H) \geq \max(6, \min{}_c(H))(\geq \max(z, \min{}_c(H)))$ を満たすものが存在する．よって改めて $z > 3$ とし，(PH_{n+1}) によって対応する y をとる．このとき任意に $f\colon {}_c[[x, y]]^{n+1} \to 3$ をとると，この関数は $f\colon {}_c[[x, y]]^{n+1} \to z$ でもあるから，ある $H \subseteq [x, y]$ で $\mathrm{card}_c(H) \geq \max(2z, \min{}_c(H))(\geq \max(z, \min{}_c(H)))$ を満たすものが存在する．よってこの場合も同じ y が条件を満たす．

（後半）$a, k \in M \models \forall x, z \exists y[[x, y] \underset{*}{\to} (z)^{n+1}_3]$ とする．示すべきは $M \models \exists y[[a, y] \to (k)^n_{reg}]$ である．$a + n, n + k$ について仮定より次を満たす b が存在する．

$$M \models [a + n, b] \underset{*}{\to} (n + k)^{n+1}_3$$

ここで補題 3.8 によって $M \models [a, b] \to (k)^n_{reg}$ を得る． □

定義 3.11. $M \models PA^-$ とする．M の部分集合 I が M のカットであるとは，次の 3 条件を満たすことをいう．

- $I \neq \varnothing$
- $a \in I$ かつ $b \in M \models b < a$ ならば $b \in I$

- $a \in I$ ならば $a+1 \in I$

また上記 3 条件に加えて $I \neq |M|$ も満たすとき I を真のカットであるという．カット I と $b \in M$ に対し，すべての $a \in I$ で $M \models b > a$ が成り立つことを $b > I$ と略記する．

カットは M の和と積に閉じていれば M の部分構造として $\mathscr{L}_A$ 構造が入り始切片になることが分かる．逆の見方をすれば，始切片の定義から部分構造になることを除いたものがカットである．例えば PA^- の任意の超準モデルにおいて $\mathbb{N}$ は真のカットであり，和と積に閉じるので始切片でもあるのだった．

定義 3.12. $\mathscr{L}$ 構造 M において $M^n (n \geq 1)$ の部分集合 A が定義可能であるとは，

$$A = \{ \overline{a} \in M \mid M \models \varphi(\overline{a}, \overline{b}) \}$$

となる $\overline{b} \in M$ と $\mathscr{L}$ 論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n, \overline{y})$ が存在することと定める．またこの A は $\varphi(x_1, ..., x_n, \overline{b})$ によって定義されるという．

注 3.13. $\mathscr{L}$ 構造 M において $M^n (n \geq 1)$ の部分集合 A が定義可能であるとき，記号 A を新しい n 変数関係記号と見なし，M での解釈を集合 $A (\subseteq M^n)$ とすることで M を言語 $\mathscr{L} + \{A\}$ の構造へ拡張する．この拡張によって得られた構造も再び M と表記し，さらに項 $t(\overline{x})$ について $\mathscr{L} + \{A\}$ 論理式 $A(t(\overline{x}))$ は $t(\overline{x}) \in A$ と表記する．

定義 3.14. $\overline{b} \in M \models PA$ とし，A が定義可能な M の部分集合であるとする．このとき $n \geq 1$ とし，次の論理式で定義される M^n の部分集合を $[A]^n$ と表記する[*7]．

$$x_1 < x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} < x_n \wedge x_1 \in A \wedge \cdots \wedge x_n \in A$$

命題 3.15. $M \models PA$ なる M において真のカットは定義可能な部分集合ではない．

証明. I を M の真の始切片とし，それが M で定義可能であると仮定する．すなわち，$\overline{a} \in M$ と $\mathscr{L}_A$ 論理式 $\varphi(x, \overline{y})$ で

$$I = \{ b \in M \mid M \models \varphi(b, \overline{a}) \}$$

を満たすものが存在したとする．このとき，カットの定義から I が空でなく下に閉じているので $0 \in I$ である．したがって $M \models \varphi(0, \overline{a})$ が成り立つ．また，任意に取った $b \in M$ で $M \models \varphi(b, \overline{a})$ が成り立つと仮定すると $b \in I$ となり，I が後者関数に閉じることから $b+1 \in I$ すなわち $M \models \varphi(b+1, \overline{a})$ が成り立つ．以上から

$$M \models \varphi(0, \overline{a}) \wedge \forall x (\varphi(x, \overline{a}) \rightarrow \varphi(x+1, \overline{a}))$$

が成り立つので，φ に関する帰納法公理から $M \models \forall x \varphi(x, \overline{a})$ すなわち $I = |M|$ となるが，これは I を真のカットとしていたことに矛盾する． □

[*7] 集合族 $\{ X \subseteq M \mid \mathrm{card}(X) = n \}$ などの $I\Sigma_1$ 上の関数と記号が重複しているが以降では文脈から判別は容易だろう．

真のカットが定義可能でないことを逆手にとり次の補題を得る．

補題 3.16 (流出 (overspill))．M を PA の超準モデルとする．このとき，M の真のカット I と，$\overline{a} \in M$ 及び $\mathscr{L}_A$ 論理式 $\varphi(x, \overline{y})$ について

$$\text{すべての } b \in I \text{ に対して } M \models \varphi(b, \overline{a}).$$

が成り立てば，$I < c$ かつ $M \models \forall x \leq c\varphi(x, \overline{a})$ を満たす $c \in M$ が存在する．

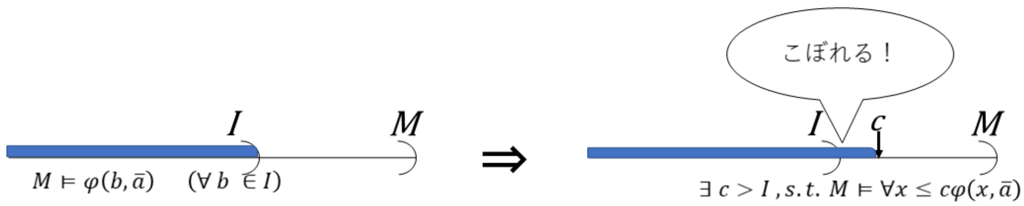

図 1　Overspill

証明． 任意の $c > I$ について $M \models \neg\forall x \leq c\varphi(x, \overline{a})$ と仮定する．I はカットであり下に閉じるので，任意の $y \in M$ について

$$y \in I \Rightarrow M \models \forall x \leq y\varphi(x, \overline{a}) \quad \text{および}$$
$$y \notin I \Rightarrow y > I \Rightarrow M \models \neg\forall x \leq y\varphi(x, \overline{a})$$

が成り立ち，$I = \{\, y \in M \mid M \models \forall x \leq y\varphi(x, \overline{a}) \,\}$ となり命題 3.15 に矛盾する．□

PA の超準モデルのカットは常に $\mathbb{N}$ を含むのでこの補題によって得られる $c \in M$ は必ず超準元である．

定義 3.17. $0 \neq n \in \mathbb{N}$ とする．M を $\mathscr{L}$ 構造とし，$D \subseteq M^n, R \subseteq M$ とする．このとき，関数 $F : D \to R$ が M において定義可能であるとは，D, R が定義可能であって，次の 2 条件を満たす論理式 $\psi(x_1, ..., x_n, y, \overline{z})$ と $\overline{c} \in M$ が存在することと定める．

- $M \models \forall\overline{x}(\overline{x} \in D \to \exists! y\psi(\overline{x}, y, \overline{c}))$
- 任意の$\overline{a} \in D, b \in M$ について $F(\overline{a}) = b \Leftrightarrow M \models \psi(\overline{a}, b, \overline{c})$

注 3.18. $\mathscr{L}$ 構造 M において関数 $F : D \to R(D \subseteq M^n, R \subseteq M)$ が定義可能であるとき，記号 F を新しい n 変数関数記号と見なし，M での解釈を次の全域関数とすることで M を言語 $\mathscr{L} + \{F\}$

の構造へ拡張する．

$$M^n \to M; \overline{a} \mapsto \begin{cases} F(\overline{a}) & \text{if } \overline{a} \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この拡張によって得られた構造も再び M と表記する．

定義 3.19. $M \models PA^-$ とする．M の部分集合 A が M において共終であるとは

$$\forall x \in M, \exists a \in A, s.t.\ M \models x \leq a$$

が成り立つことと定め，$A \subseteq_{\mathrm{cf}} M$ と表記する．

例 3.20. $M \models PA$ において $\{ x \in M \mid M \models \mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \}$ は定義可能かつ M において共終な部分集合である．

命題 3.21. $M \models PA$ とし，A を M において定義可能かつ共終な部分集合とする．このとき，A の要素を小さい順に枚挙する関数 $\mathrm{Emu}_A : M \to M$ が定義可能である．

証明.

$$\begin{aligned} \mathrm{Emu}_A(x) = y \leftrightarrow \exists w[\forall j < (w)_0(j \notin A) \wedge \forall i < x-1((w)_i < (w)_{i+1}) \wedge \forall i \leq x((w)_i \in A) \\ \wedge \forall i < x \forall j < (w)_{i+1}((w)_i < j \to j \notin A) \wedge y = (w)_x] \end{aligned}$$

と定めればよい．well-defined 性を確認する．

<u>全域性:</u>

帰納法で示す．$x = 0$ なら $M \models y \in A$ なる最小の y をとれば補題 Kaye [1] 5.8(c) からわかる．インダクションステップでは同補題 (d) を使えばよい．

<u>一意性:</u>

これは次を示せば十分．

$$\begin{aligned} \forall x, w, w'[&\forall j < (w)_0(j \notin A) \wedge \forall i < x-1((w)_i < (w)_{i+1}) \wedge \forall i \leq x((w)_i \in A) \\ &\wedge \forall i < x \forall j < (w)_{i+1}((w)_i < j \to j \notin A) \\ &\wedge \forall j < (w)_0(j \notin A) \wedge \forall i < x-1((w)_i < (w)_{i+1}) \wedge \forall i \leq x((w)_i \in A) \\ &\wedge \forall i < x \forall j < (w)_{i+1}((w)_i < j \to j \notin A) \\ &\to \forall i \leq x((w)_i = (w')_i)] \end{aligned}$$

x, w, w' を任意にとり，上記の上から 4 行目までを満たすとする．$M \models \forall i \leq x((w)_i = (w')_i)$ を i の x までの帰納法で示す．$i = 0$ なら明らか．$i < x$ で $M \models (w)_i = (w')_i$ が成り立つとする．$M \models (w)_{i+1} < (w')_{i+1}$ だったと仮定すると，

$$A \ni (w')_i = (w)_i < (w)_{i+1} < (w')_{i+1} \in A$$

であり，$(w)_{i+1} \notin A$ が導かれて矛盾する．$M \models (w)_{i+1} > (w')_{i+1}$ としても同様に矛盾が導かれるので $(w)_{i+1} = (w')_{i+1}$ が分かる． □

命題 3.22. $\mathscr{L}_A$ 論理式 $\varphi(x, \overline{y}, \overline{z})$ に関して，下記の論理式を φ の無限鳩ノ巣公理[*8]とよぶ．これは PA から証明可能である[*9]．

$$\forall \overline{a}, b(\forall w \exists x > w \exists y < b\varphi(x, \overline{y}, \overline{a}) \to \exists y < b \forall w \exists x > w\varphi(x, \overline{y}, \overline{a}))$$

証明． 採集公理から明らか． □

$e \in M \models PA$ において $\{ x \in M \mid M \models x < e \}$ は定義可能な集合であり，以降この集合を再び e と表記する．

補題 3.23 (Kaye [1] lemma14.14)**．** $e \in M \models PA$，$0 \neq n \in \mathbb{N}$ とし，A を M で定義可能な共終部分集合，$F : [A]^n \to e$ を M で定義可能な関数とする．このとき，次を満たす M の部分集合 B が存在する．

- $B \subseteq A$
- B は M で定義可能
- B は M で共終
- F が $[B]^n$ 上で一定

証明． n に関する帰納法で示す．

base: $n = 1$ のとき

A が M で共終であり，$F : A \to e$ であることから

$$M \models \forall w \exists x > w \exists y < e(x \in A \land F(x) = y)$$

が成り立つ．よって無限鳩ノ巣から

$$M \models \exists y < e \forall w \exists x > w(x \in A \land F(x) = y)$$

を得る．このときある $y_0 < e$ で $M \models \forall w \exists x > w(x \in A \land F(x) = y_0)$ となるから，B を

$$x \in B \leftrightarrow (x \in A \land F(x) = y_0)$$

で定めればよい．

induction: $n - 1 \geq 1$ で補題の主張が成り立つと仮定し n の場合の成立をみる．

まず何かしらよい性質をもつ関数 $G : M \to A$ を定義したい．G のサブルーチンとして機能する

*8 筆者の主観だが，この論理式を無限鳩ノ巣公理とよぶのは帰納法公理や採集公理ほどは一般的ではないように思う．

*9 実際には全ての無限鳩ノ巣公理と PA^- からなる理論は Coll と同値であり，証明も難しくはない．

論理式 $\theta(z,x,g)$ を次とする．

$$
\begin{aligned}
&\exists d \geq z(\quad \overbrace{g\colon {}_c d \to A}^{g\text{ は関数 } d\to A \text{ のコード}} \quad \wedge\{g(z-1)<x \wedge x\in A\wedge \\
&\forall z_1,...,z_n([z_1,z_2,\dots,z_n]\in_c [z]^n \to F(g(z_1),...,g(z_{n-1}),g(z_n)) = F(g(z_1),...,g(z_{n-1}),x))\wedge \\
&\forall w\exists y>w(y\in A\wedge \forall z_1,...,z_{n-1}([z_1,z_2,\dots,z_{n-1}]\in_c [z]^{n-1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \to F(g(z_1),...,g(z_{n-1}),x) = F(g(z_1),...,g(z_{n-1}),y))\} \\
&\wedge \forall x'<x\neg(\{\}\text{ の中身})
\end{aligned}
$$

次に $G(z)=x$ を以下で定める．

$$
\begin{aligned}
G(z)=x \leftrightarrow \exists g[\forall v\leq z(g(v)\in A))\wedge g(z)=x\wedge \\
\forall v\leq z((v<n-1\to g(v)=\mathrm{Emu}_A(v))\wedge \\
(v\geq n-1\to\theta(v,g(v),g)))]
\end{aligned}
$$

ただしここで Emu_A は命題 3.21 で構成した A の要素を小さい順に枚挙してくる関数であり，$g(v)$ とは $[g]_v$ の略記である．

<u>Claim1:</u> $M\models\forall z\exists!x(G(z)=x)$

z に関する帰納法で示すのだが，$z<n-1$ となる z については，$G(z)$ が A の $z+1$ 番目の元としてただ一つ存在するので明らか．また $z=n-1$ の場合は g を $M\models\forall v<n-1(g(v)=\mathrm{Emu}_A(v))$ を満たすように取れば示すべきは $M\models\exists!x\theta(n-1,x,g)$ であり，これは

$$M\models\exists x\forall w\exists y>w(g(n-2)<x\wedge x\in A\wedge y\in A\wedge F(g(0),...,g(n-2),x)=F(g(0),...,g(n-2),y))$$

を示すことで x に関する最小値原理によって結論が従う．

$F(g(0),...,g(n-2),*)$ は A 上の一変数関数と見なせるので，$n=1$ の場合の補題の結論から，M で定義可能な共終部分集合 $B(\subseteq A)$ で $F(g(0),...,g(n-2),*)$ が B 上一定となる．したがってある $b_0<e$ で

$$M\models\forall w\exists x>w(x\in B\wedge F(g(0),...,g(n-2),x)=b_0) \tag{3.9}$$

が成り立つ．ゆえに w として $g(n-2)$ を考えれば，ある $x\in M$ で

$$M\models g(n-2)<x\wedge x\in B\wedge F(g(0),...,g(n-2),x)=b_0)$$

が成り立つ．再び式 (3.9) を使えば

$$M\models\forall w\exists y>w(g(n-2)<x\wedge x\in B\wedge y\in B\wedge F(g(0),...,g(n-2),x)=F(g(0),...,g(n-2),y))$$

であり，$B\subseteq A$ と合わせて

$$M\models\exists x\forall w\exists y>w(g(n-2)<x\wedge x\in A\wedge y\in A\wedge F(g(0),...,g(n-2),x)=F(g(0),...,g(n-2),y))$$

を得る．次に $z \geq n-1$ で $M \models \exists! x G(z) = x$ と仮定し，$z+1$ の場合を考える．仮定から長さ $z+1$ のある $g \in M$ で

$$\begin{aligned}&\forall v \leq z(g(v) \in A)) \wedge g(z) = x \wedge \\ &\forall v \leq z((v < n-1 \to g(v) = \mathrm{Emu}_A(v)) \wedge \\ &\qquad (v \geq n-1 \to \theta(v, g(v), g)))]\end{aligned}$$

を満たすものがあり，この g を 1 ステップ延長することを考える．いま特に $M \models \theta(z, g(z), g)$ であることから

$$\forall z_1, ..., z_n([z_1, z_2, \ldots, z_n] \in_c [z]^n \to F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z_n)) = F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z_n)) \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}&\forall w \exists x > w(x \in A \wedge \forall z_1, ..., z_{n-1}([z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}] \in_c [z]^{n-1} \\ &\qquad \to F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z)) = F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), x))\end{aligned} \tag{3.11}$$

が M で成り立つ．よって任意に w をとると，$x > w$ で式 (3.11) の () の中身を満たすものが取れる．$z_1 < z_2 < \cdots < z_n < z+1$ なる z_i たちをとると，

(i) $z_n = z$ のとき
　このとき $z_1 < \cdots < z_{n-1} < z$ だから式 (3.11) より

$$\begin{aligned}F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), x) &= F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z)) \\ &= F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z_n))\end{aligned}$$

(ii) $z_n < z$ のとき
　$z_1 < \cdots < z_{n-1} < z_n < z$ だからまず式 (3.10) より

$$F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z_n)) = F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z))$$

　が成り立ち，式 (3.11) から

$$F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z)) = F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), x)$$

　も成り立つので合わせて

$$F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z_n)) = F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), x)$$

　を得る．

よって (i)(ii) を合わせて

$$\begin{aligned}&\forall w \exists x > w(x \in A \wedge \forall z_1, ..., z_n([z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n] \in_c [z+1]^n \\ &\qquad \to F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z_n)) = F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), x))\end{aligned} \tag{3.12}$$

を得る．

先の式 (3.12) の $\forall w \exists x > w$ の内側の論理式を $\psi(x)$ と書くことにして，次が成り立つことを p に関する帰納法で示す．

$$\begin{aligned} M \models & \forall p \exists b \forall w \exists x > w(\psi(x) \wedge \forall q < p(\forall z_1, ..., z_{n-1}(\\ & (q = [z_1, \dots, z_{n-1}] \in_c [z+1]^{n-1}) \to F(g(z_1), \dots, g(z_{n-1}), x) = [b]_q))) \end{aligned} \tag{3.13}$$

$p = 0$ の場合は明らか．次に適当に固定した p で次を満たす b が存在したとする．

$$\begin{aligned} M \models & \forall w \exists x > w(\psi(x) \wedge \forall q < p(\forall z_1, ..., z_{n-1}(\\ & (q = [z_1, \dots, z_{n-1}] \in_c [z+1]^{n-1} \to F(g(z_1), \dots, g(z_{n-1}), x) = [b]_q))) \end{aligned}$$

ここで上記論理式の $\forall w \exists x > w$ の内側で定義される M の部分集合を X とする．いま p が新しいパターンであるとする，つまり $p = [w_1, ..., w_{n-1}]$ は $w_1 < \cdots < w_{n-1} < z+1$ となっていたと仮定してよい（そうでなければ同じ b が $p+1$ の場合の条件を満たす）．ここで X 上の関数 F' を

$$F' : X \to e; x \mapsto F(g(w_1), \dots, g(w_{n-1}), x)$$

によって定義すると，$X \subseteq_{\mathrm{cf}} M$ なので $n = 1$ の場合の補題の結論から M で定義可能な共終部分集合 $Y(\subseteq X)$ が存在し，ある $r < e$ によって $\forall x \in Y, F'(x) = r$ となる．$b' = b[r/p]$ とおき，この b' が条件を満たすことは次の様に確認できる．

$$\begin{aligned} & M \models \forall w \exists x > w(x \in Y) \\ \Rightarrow & M \models \forall w \exists x > w(x \in X \wedge F(g(w_1), \dots, g(w_{n-1}), x) = [b']_p) \\ \Rightarrow & M \models \forall w \exists x > w(\psi(x) \wedge \forall q < p+1(\forall z_1, ..., z_{n-1}(\\ & \quad (q = [z_1, \dots, z_{n-1}] \in_c [z+1]^{n-1} \to F(g(z_1), \dots, g(z_{n-1}), x) = [b']_q)))) \end{aligned}$$

式 (3.13) において十分大きな p を考えれば任意の $z_1 < \cdots < z_{n-1} < z+1$ に対し $[z_1, ..., z_{n-1}] < p$ となるので，対応して存在する b_p は考えるべき z_i たちの全パターンを網羅できている．ゆえに

$$\begin{aligned} M \models \forall w \exists x > w(\psi(x) \wedge \forall z_1, ..., z_{n-1}([z_1, \dots, z_{n-1}] \in_c [z+1]^{n-1} \\ \to F(g(z_1), \dots, g(z_{n-1}), x) = [b_p]_{[z_1, \dots, z_{n-1}]})) \end{aligned}$$

が成り立ち，$\forall w \exists x > w$ の中身を満たす $x \in M$ を $x > g(z)$ を満たすように適当にとって固定すれば特に

$$\begin{aligned} M \models & g(z) < x \wedge \psi(x) \wedge \\ & \forall w \exists y > w(y \in A \wedge \forall z_1, ..., z_{n-1}([z_1, \dots, z_{n-1}] \in_c [z+1]^{n-1} \\ & \qquad \to F(g(z_1), \dots, g(z_{n-1}), y) = [b_p]_{[z_1, \dots, z_{n-1}]} = F(g(z_1), \dots, g(z_{n-1}), x))) \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} M \models & g(z) < x \wedge x \in A \wedge \\ & (\forall z_1, ..., z_n([z_1, \dots, z_{n-1}, z_n] \in_c [z+1]^n \\ & \qquad \to F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), g(z_n)) = F(g(z_1), ..., g(z_{n-1}), x))) \wedge \\ & (\forall w \exists y > w(y \in A \wedge \forall z_1, ..., z_{n-1}(z_1 < \cdots < z_{n-1} < z+1 \\ & \qquad \to F(g(z_1), \dots, g(z_{n-1}), y) = F(g(z_1), \dots, g(z_{n-1}), x)))) \end{aligned}$$

であるから，これを満たす最小の x をとり $g' = g[x/z+1]$ とおけば $M \models \theta(z+1, g'(z+1), g')$ が成り立つ．Claim1 の証明終わり．

最後に F に関して均質な集合を構成する．まず G に関して F は次の性質をもつ．任意の M の $n+1$ 個の元 $z_1 < \cdots < z_{n-1} < z_n < z_{n+1}$ に対し，$n-1 < z_{n+1}$ であることから $G(z_{n+1})$ について考えると，

$$\begin{aligned} M \models \forall w_1, ..., w_n (w_1 < \cdots < w_{n-1} < w_n < z_{n+1} \\ \to F(G(w_1), ..., G(w_{n-1}), G(w_n)) = F(G(w_1), ..., G(w_{n-1}), G(z_{n+1})) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} F(G(z_1), ..., G(z_{n-1}), G(z_n)) &= F(G(z_1), ..., G(z_{n-1}), G(z_{n+1})) \\ &= F(G(z_1), ..., G(z_{n-1}), G(z_{n-1}+1)) \end{aligned}$$

すなわち $z_1 < \cdots < z_{n-1}$ を決めれば，z_{n-1} より大きい入力について $F(G(z_1), ..., G(z_{n-1}), G(*))$ が一定の値 $F(G(z_1), ..., G(z_{n-1}), G(z_{n-1}+1))$ になるということである．そこで関数

$$F' : [M]^{n-1} \to e; x_1 < \cdots < x_{n-1} \mapsto F(G(x_1), ..., G(x_{n-1}), G(x_{n-1}+1))$$

に帰納法の仮定を適用して，F' が $[C]^{n-1}$ 上一定の値をとるような定義可能部分集合で $C \subseteq_{\mathrm{cf}} M$ となるものが存在する．ここで B を関数 G による C の像として，つまり

$$x \in B \Leftrightarrow \exists y \in C (x = G(y))$$

によって定義すれば，この B が条件を満たすことを示す．

<u>Claim2:</u> $B \subseteq A$，$B \subseteq_{\mathrm{cf}} M$ であり F は $[B]^n$ 上一定の値をとる．

$G : M \to A$ なので $B \subseteq A$ は明らか．$w \in M$ を任意にとると，$C \subseteq_{\mathrm{cf}} M$ より $y \geq w$ なる $y \in C$ が存在するので，G が狭義単調増加[*10]であることから $B \ni G(y) \geq y \geq w$ となる．

B の元 $x_1 < \cdots < x_n$ を任意にとると，対応して C の元 $y_1 < \cdots < y_n$ が存在し，

$$\begin{aligned} F(x_1, ..., x_n) &= F(G(y_1), ..., G(y_n)) \\ &= F(G(y_1), ..., G(y_{n-1}+1)) \\ &= F'(y_1, ..., y_{n-1}) \end{aligned}$$

となるので，F' が $[C]^{n-1}$ 上一定であることから F も $[B]^n$ 上一定である． □

補題 3.24 (Kaye [1] lemma14.15)**.** 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $PA \vdash (PH_n)$ が成り立つ．したがって命題 3.10 から $PA \vdash (KM_n)$ も従う．

証明. $(PH)_0$ や (KM_0) は考えるべき写像が存在しないため明らか．背理法で示す．ある $n \geq 1$ で $PA \nvdash (PH_n)$ だとすると，$M \models PA + \exists x, z \forall y \neg [[x, y] \underset{*}{\to} (2z)^n_z]$ となる M が存在する．ここ

[*10] これは帰納法で簡単に示せる．

で $a, c \in M \models \forall b \neg([[a,b] \underset{*}{\to} (2c)^n_c])$ であるから，次の関数 MCE : $M \to M$ が定義可能である．

$$\mathrm{MCE}(x) = \min \left\{ f \;\middle|\; \begin{aligned} f\colon {}_c[[a,x]]^n \to c \wedge \neg \exists d < c \exists H \subseteq_i [a,x]\{\mathrm{card}_c(H) \geq \max\,(k, \min{}_c(H)) \\ \wedge \forall \{x_1, ..., x_n\} \in_c [H]^n (f(x_1, ..., x_n) = d)\} \end{aligned} \right\}$$

煩雑になるため以降では $b \in M$ の MCE による像を f_b と表記する．ここで M の定義可能な部分集合 $\{ x \in M \mid M \models x \geq a \}$ を $[a, \infty)$ と書き，関数 $F : [[a, \infty)]^{n+1} \to c$ を

$$F(x_1, ..., x_{n+1}) = f_{x_{n+1}}(x_1, ..., x_n)$$

によって定義すると，補題 3.23 から M の部分集合 B で次を満たすものが存在する．

- $B \subseteq [a, \infty)$
- B は M で定義可能
- B は M で共終
- F が $[B]^{n+1}$ 上で一定

ここで Emu_B を命題 3.21 で構成した B の要素を枚挙してくる関数とし，$h_0 = \mathrm{Emu}_B(2c + \min(B)+1)$ とおき，さらに $H = \{ \mathrm{Emu}_B(x) \mid x < 2c + \min(B) \}$ と定める[*11]．すると $\mathrm{Emu}_B(x)$ の単調増加性から

$$\mathrm{card}_c(H) = 2c + \min(B) = 2c + \mathrm{Emu}_B(0) = 2c + \min{}_c(H) \geq \max(2c, \min{}_c(H))$$

であり，任意の H の元 $x_1 < \cdots < x_n$ について

$$f_{h_0}(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, h_0)$$

となるので F が $[B]^{n+1}$ 上一定であることから f_{h_0} も $[H]^n$ 上で一定の値を取る．これは f_{h_0} の取り方に反する． □

補題 3.25. $a, b, c, d, e, k \in M \models PA$ とし，$k \geq e$ で $M \models [a, b+d] \underset{*}{\to} (k+d)^{e+d}_c$ が成り立つと仮定する．このとき，任意の $f : [[a,b]]^e \to c$ に対し，f に関して均質な $H \subseteq [a,b]$ で $\mathrm{card}_c(H) \geq \max(k, \min{}_c(H) - d)$ を満たすものが存在する．

証明. 任意にとった $f\colon {}_c[[a,b]]^e \to c$ について，別の関数 $g\colon {}_c[[a, b+d]]^{e+d} \to c$ を

$$g(x_1, ..., x_e, x_{e+1}, ..., x_{e+d}) = f(x_1, ..., x_e)$$

で定めると[*12]，仮定から g に関して均質な H_g で

$$\mathrm{card}_c(H_g) \geq \max(k + d, \min{}_c(H_g))$$

[*11] この H は厳密には https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/Nsettheory.pdf の定理 [Δ_1 有界集合コードの生成] によって M の元としてとっている．

[*12] $k \geq e$ で $[a, b+d] \underset{*}{\to} (k+d)^{e+d}_c$ と合わせて $b + d - a + 1 \geq k + d \geq e + d$ すなわち $b - a + 1 \geq e$ が成り立ち f, g の写像が確かに定義される（cf. 注 3.4）．

を満たすものが存在する．H の後ろ d 個の元を $l_1 < \cdots < l_d$ とし，$H = H_g \backslash \{l_1, \ldots, l_d\} \subseteq_i [a,b]$ とおくと，明らかに

$$\mathrm{card}_c(H) = \mathrm{card}_c(H_g) - d \geq \max(k, \min{}_c(H_g) - d) = \max(k, \min{}_c(H) - d)$$

となり，任意の $x_1 < \cdots < x_e, y_1 < \cdots < y_e \in H(\subseteq_i H_g)$ について

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_e) &= g(x_1, ..., x_e, l_1, ..., l_d) \\ &= g(y_1, ..., y_e, l_1, ..., l_d) \\ &= f(y_1, ..., y_e) \end{aligned}$$

が成り立つ． □

系 3.26.

$$PA \vdash \forall a, b, c, d, e, k(k \geq e \wedge [[a+d, b] \underset{*}{\to} (k+d)_c^{e+d}] \to [[a,b] \underset{*}{\to} (k)_c^e])$$

証明． $a, b, c, d, e, k \in M \models PA$ で $k \geq e$ とし $M \models [a+d, b] \underset{*}{\to} (k+d)_c^{e+d}$ を仮定し (自明な場合を除くために $e \geq 1$ としてよい)，任意に $f\colon {}_c[[a,b]]^e \to c$ をとる．ここで別の関数 $g\colon {}_c[[a+d,b]]^e \to c$ を[*13]

$$g(x_1, ..., x_e) = f(x_1 - d, ..., x_e - d)$$

で定めると，命題 3.5 と補題 3.25 から g に関して均質な $H_g \subseteq [a+d, b]$ で $\mathrm{card}_c(H_g) \geq \max(k, \min{}_c(H_g) - d)$ を満たすものが存在する．いま $H = \{\, h - d \mid h \in H_g \,\}$ とおくと，

$$\mathrm{card}_c(H) = \mathrm{card}_c(H_g) \geq \max(k, \min{}_c(H_g) - d) = \max(k, \min{}_c(H))$$

であり明らかに H は f に関して均質． □

命題 3.27.

$$PA \vdash \forall a, b, d, e, k(k \geq e \wedge [[a,b] \to (k+d)_{reg}^{e+d}] \to [[a,b] \to (k)_{reg}^e])$$

証明． $a, b, d, e, k \in M \models PA$ で $M \models k \geq e \wedge [[a,b] \to (k+d)_{reg}^{e+d}]$ を仮定し (自明な場合を除くために $d, e \geq 1$ としてよい)，後退的な関数 $f\colon {}_c[[a,b]]^e \to b$ を任意にとる．ここで別の関数 $g\colon {}_c[[a,b]]^{e+d} \to b$ を

$$g(x_1, ..., x_e, x_{e+1}, ..., x_{e+d}) = f(x_1, ..., x_e)$$

によって定めると，g は明らかに後退的であるので仮定より g に関して頭均質な H_g で $\mathrm{card}_c(H_g) = k + d$ であるものが存在する．H_g の後ろ d 個の元を $l_1 < \cdots < l_d$ とし，$H = H_g \backslash \{l_1, ..., l_d\}$ とおくと，任意の H の元 $x_1 < x_2 < \cdots < x_e, x_1 < y_2 < \cdots < y_e$ に対して

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_e) &= g(x_1, x_2, ..., x_e, l_1, ..., l_d) \\ &= g(x_1, y_2, ..., y_e, l_1, ..., l_d) \\ &= f(x_1, y_2, ..., y_e) \end{aligned}$$

[*13] 仮定から $(b+d) - (a+d) + 1 \geq k + d \geq e + d$ としてよいから，$b - a - 1 \geq e + d$ となり，f, g は確かに存在する．

であり，$\mathrm{card}_c(H) = k$ となっている． □

定理 3.28 (Kaye [1] theorem14.16)**.**

$$Y_{PH}(a,b) = e \leftrightarrow \forall n \le e([a,b] \underset{*}{\to} (2n)^n_3) \land \neg([a,b] \underset{*}{\to} (2e+2)^{e+1}_3)$$
$$Y_{KM}(a,b) = e \leftrightarrow \forall n \le e([a,b] \to (2n)^n_{reg}) \land \neg([a,b] \to (2e+2)^{e+1}_{reg})$$

はそれぞれ PA を充足するためのよくふるまう指標である．

証明． インフォーマル書けばそれぞれ

$$Y_{PH}(a,b) = \max\{\, e \mid \forall n \le e([a,b] \underset{*}{\to} (2n)^n_3)\,\}$$
$$Y_{KM}(a,b) = \max\{\, e \mid \forall n \le e([a,b] \to (2n)^n_{reg})\,\}$$

である．

<u>可証再帰性</u>

まずそのグラフが Σ_1 であることは $[a,b] \underset{*}{\to} (2e)^e_3$ や $[a,b] \to (2e)^e_{reg}$ が $\Delta_1(PA)$ であることから明らか．

$PA \vdash \forall a,b([a,b] \underset{*}{\to} (0)^0_3 \land \neg([a,b] \underset{*}{\to} (2b)^b_3))$ であることから最小値原理により従う．Y_{KM} についても同様．同時に $Y_{PH}(a,b), Y_{KM}(a,b) \le b$ も得られた．

<u>単調性</u>

$M \models [a,b] \underset{*}{\to} (2e)^e_3$ なら $a' \le a, b \le b'$ について同じ e で $[a',b] \underset{*}{\to} (2e)^e_3$ および $[a,b'] \underset{*}{\to} (2e)^e_3$ が成り立つことから明らか．

指標として本質的な始切片の存在に関する性質を示す．まず $a,b \in M \models PA$ について $a \in I < b$ および $I \models PA$ を満たす $I \subseteq_e M$ が存在したとする．

初めに $Y_{PH}(a,b) > \mathbb{N}$ を示す．このとき補題 3.24 より任意の $n \in \mathbb{N}$ について $I \models \forall x,z \exists y [[x,y] \underset{*}{\to} (2z)^n_z]$ であるから次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
& I \models \exists c[[a,c] \underset{*}{\to} (2n)^n_n] \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\
\Rightarrow\ & I \models n \ge 3 \to \exists c[[a,c] \underset{*}{\to} (2n)^n_3] \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\
\Rightarrow\ & I \models \exists c[[a,c] \underset{*}{\to} (2n)^n_3] \quad (\forall n \in \mathbb{N}) && (\because (PH_1),(PH_2)) \\
\Rightarrow\ & M \models \exists c < b[[a,c] \underset{*}{\to} (2n)^n_3] \quad (\forall n \in \mathbb{N}) && (\because b > I \subseteq_e M) \\
\Rightarrow\ & \mathbb{N} < {}^{\exists} e \in M \models \forall n \le e(\exists c < b[[a,c] \underset{*}{\to} (2n)^n_3]) && (\because overspill) \\
\Rightarrow\ & M \models \forall n \le e[[a,b] \underset{*}{\to} (2n)^n_3] \\
\Rightarrow\ & M \models Y_{PH}(a,b) \ge e
\end{aligned}$$

次に $Y_{KM}(a,b) > \mathbb{N}$ を示す．まず補題 3.24 と命題 3.10 を合わせると，任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$PA \vdash \forall x,z \exists y[[x,y] \underset{*}{\to} (z)^{n+1}_3]$$

が成り立つ．よって以下となる．

$$
\begin{aligned}
&I \models \exists c[[a+n,c] \underset{*}{\rightarrow} (3n)_3^{n+1}] \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\
&\Rightarrow M \models \exists c < b[[a+n,c] \underset{*}{\rightarrow} (3n)_3^{n+1}] \quad (\forall n \in \mathbb{N}) && (\because b > I \subseteq_e M) \\
\Rightarrow \mathbb{N} < {}^{\exists}e \in M \models &\forall n \leq e \exists c < b[[a+n,c] \underset{*}{\rightarrow} (3n)_3^{n+1}] && (\because overspill) \\
&\Rightarrow M \models \forall n \leq e[[a+n,b] \underset{*}{\rightarrow} (n+2n)_3^{n+1}] \\
&\Rightarrow M \models \forall n \leq e[[a,b] \rightarrow (2n)_{reg}^{n}] && (\because \text{補題 } 3.8) \\
&\Rightarrow M \models Y_{KM}(a,b) \geq e
\end{aligned}
$$

逆を示す．$a,b \in M \models PA$ とし，$Y_{PH}(a,b) > \mathbb{N}$ と仮定する．もし仮に $b \in \mathbb{N}$ なら明らかに $Y_{PH}(a,b) \in \mathbb{N}$ なので $b > \mathbb{N}$ である．$a \in \mathbb{N}$ なら $\mathbb{N}$ が求める始切片なので $a > \mathbb{N}$ と仮定してよい．さらに $M \models \forall e \leq Y_{PH}(a,b)([a,b] \underset{*}{\rightarrow} (2e)_3^e])$ であるので，$\mathbb{N} < d < \min(Y_{PH}(a,b), \lfloor \frac{a}{2} \rfloor)$ なる $d \in M$ をひとつ取って固定しておく．

すると $\mathbb{N}$ での有限ラムゼーの成立から，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，ある $y \in \mathbb{N}$ で $\mathbb{N} \models 2n+2 \leq y \wedge y \rightarrow (3n+1)_{n+2}^{2n+1}$ が成り立つ．よって Σ_1 論理式の上方絶対性と $d > \mathbb{N}$ より

$$M \models 2n+2 \leq d \wedge d \rightarrow (3n+1)_{n+2}^{2n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるから，overspill よりある超準元 $e \in M$ で

$$M \models 2e+2 \leq d \wedge d \rightarrow (3e+1)_{e+2}^{2e+1} \tag{3.14}$$

となる．また $[a,b] \underset{*}{\rightarrow} (2d)_3^d$ から，系 3.26 の d を $d-(2e+2)$ とみて

$$M \models [a-(d-(2e+2)),b] \underset{*}{\rightarrow} (d+2e+2)_3^{2e+2}$$

を得る．矢印右側 () の中身は自由に減らせるので $[a-(d-(2e+2)),b] \underset{*}{\rightarrow} (d+2e+1)_3^{2e+2}$ に書き換わり，補題 3.8 で e を $2e+1$ とみて $a \geq d-1$ より

$$M \models [a-d+1,b] \rightarrow (d)_{reg}^{2e+1}$$

を得る．すると $2e+1 < a-d+1$ であるので，$d \rightarrow (3e+1)_{e+2}^{2e+1}$ と合わせて補題 3.7 から $a-d+1 \in I < b$ となる M の始切片で $I \models PA$ を満たすものが存在する．$I \ni 2a-(2d+1) > 2a-a = a$ より $a \in I$ であり，この I が条件を満たす．

$Y_{KM}(a,b) > \mathbb{N}$ と仮定する．先ほどと同様に $b > \mathbb{N}$ であり，$a \in \mathbb{N}$ なら $\mathbb{N}$ が求める始切片なので $a > \mathbb{N}$ と仮定してよく，さらに $M \models \forall e \leq Y_{KM}(a,b)([a,b] \rightarrow (2e)_{reg}^e)$ であるので $\mathbb{N} < d < \min(Y_{KM}(a,b), a)$ なる $d \in M$ をひとつ取って固定しておく．いま $\mathbb{N} < e \in M$ を式 (3.14) を満たすようにとれば，特に $d-(2e+1) > 0$ であるので系 3.27 によって $M \models [a,b] \rightarrow (d+2e+1)_{reg}^{2e+1}$ が成り立ち，自明に

$$M \models [a,b] \rightarrow (d)_{reg}^{2e+1} \wedge d \rightarrow (3e+1)_{e+2}^{2e+1}$$

である．$2e+1 < d < a$ であるので，再び補題 3.7 から $I \subseteq_e M$ で $a \in I < b$ かつ $I \models PA$ となる I が存在する． □

系 3.29 (Kaye [1] corollary14.17)**.**

$$\forall x, z\exists y([x,y] \underset{*}{\to} (2z)^z_3)$$
$$\forall x, z\exists y([x,y] \to (2z)^z_{reg})$$

は $\mathbb{N}$ で成り立つが，PA からは証明されない．したがってどちらも PA の独立命題である．

証明. $\mathbb{N}$ で成り立つことはどちらの主張も補題 3.24 と命題 3.10 から従う．したがってその否定が PA から証明されないことも同時に分かる．次に PA から肯定が証明されないことを確認する．

$a, e \in M \models PA + \forall x, z\exists y([x,y] \underset{*}{\to} (2z)^z_3)$ を任意にとると，

$$\begin{aligned}
&M \models \forall n \leq e\exists y([a,y] \underset{*}{\to} (2n)^n_3)\\
\Rightarrow &M \models \exists b\forall n \leq e\exists y < b([a,y] \underset{*}{\to} (2n)^n_3) && (\because \text{採集公理})\\
\Rightarrow &M \models \exists b\forall n \leq e([a,b] \underset{*}{\to} (2n)^n_3)\\
\Rightarrow &M \models \exists b Y_{PH}(a,b) \geq e\\
\Rightarrow &M \models \forall a, e\exists b Y_{PH}(a,b) \geq e
\end{aligned}$$

を得る．ゆえに

$$PA + \forall x, z\exists y([x,y] \underset{*}{\to} (2z)^z_3]) \vdash \forall x, z\exists y Y_{PH}(x,y) \geq z$$

が成り立つ．一方，Y_{PH} は PA を充足するためのよくふるまう指標であるので系 2.4 より

$$PA \nvdash \forall x, z\exists y Y_{PH}(x,y) \geq z$$

が成り立つ．以上から

$$PA \nvdash \forall x, z\exists y([x,y] \underset{*}{\to} (2z)^z_3)$$

だと分かる．$\forall x, z\exists y([x,y] \to (2z)^z_{reg})$ についても全く同様である． □

系 3.30. 次が成り立つ．

$$\mathbb{N} \models (PH) \text{ かつ } PA \nvdash (PH) \text{ かつ } PA \nvdash \neg(PH)$$
$$\mathbb{N} \models (KM) \text{ かつ } PA \nvdash (KM) \text{ かつ } PA \nvdash \neg(KM)$$

証明. $\mathbb{N} \models (PH) \leftrightarrow \forall n(PH_n)$ と補題 3.24 から $\mathbb{N} \models (PH)$ と，合わせて $PA \nvdash \neg(PH)$ が分かる．$PA \vdash (PH) \to \forall x, z\exists y([x,y] \underset{*}{\to} (2z)^z_3)$ であるので系 3.29 より $PA \nvdash (PH)$ が成り立つ．(KM) についても同様. □

参考文献

[1] Richard Kaye, “Models of Peano Arithmetic” ,（Oxford logic guides, 15）（Oxford science publications）Clarendon Press , Oxford University Press,1991.