ω モデル反映入門

橋本 航気

最終更新：2023 年 12 月 24 日

概要

ω モデル反映（cf. 定義 4.25）とは，与えられた自然数の部分集合について，それを含む某かの ω モデルが存在する，という二階算術の公理の一種であり，主として ACA_0 より強い理論の分類に用いられる．本稿はこの公理の解説を中心に据えた二階算術の入門記事である．

目次

1　この文章に関する説明

本稿は Alwe Logic さんが企画された Mathematical Logic Advent Calendar 2023（https://adventar.org/calendars/8737）の 1 日目の記事である．

ω モデル反映やそれを定義するための coded ωモデル の解説は二階算術の古典的名著である [Sim09] の VII,VIII 章にもある．しかし，それらは形式的な部分がやや省略されているため，読み進めるには読者が定義を補う必要がある．そのため興味深い結果までの退屈な道のりが長く，強いモチベーションやゼミなどによる強制力，あるいは圧倒的知性が無い限り読者は他の面白い話題へ浮気してしまう．その退屈な道のりを舗装することで入門のハードルを下げ，ω モデル反映を使いこなす人間が溢れかえる世の中になることを願って本稿は書かれた．ついでに [Sim09] の諸定義を計算論ベースで書き直した．

前提知識について補足しておこう．本稿の前提知識は一階述語論理と計算論の基礎，および第二不完全性定理である[*1]．加えて，PA などの一階算術の理論に触れた経験があれば理想的である．前提知識に関して参考文献を挙げておこう．一階述語論理の基礎，一階算術，第二不完全性定理について十分な解説があり，計算論の記述は薄いが二階算術に多くのページを割いている [田中 19] がまず挙げられる．本稿でも小節 2.1 を書くにあたって大いに参考にした．計算論の基礎は [田中 22] の一章がコンパクトにまとまっており，かつ解説も丁寧である．またこの本は和書としては珍しく，ATR_0 以上の強い二階算術の体系と深い関わりがある記述集合論についても述べられており，二階算術を勉強する際には先の本と合わせて必携だろう．

各節の簡単な解説：2 節ではまず我々が議論する二階算術を一階述語論理に埋め込む．それによって完全性定理をはじめとする一階述語論理の基本的な定理を獲得する．また，ω モデル反映を定義する際に用いられる可算 ω モデルのコード化に関して重要と思われる，初等ダイアグラムの再帰的構成のアイデアを説明する．

3 節では RCA_0 を定義し，それが十分に計算論を展開できることを確認する．特にいわゆる計算論の三種の神器である正規形定理・S^m_n 定理・再帰定理などが RCA_0 である意味で成立することを確認し，r.e. 集合や Turing 還元を定式化する．この計算論の諸定義を下に，ACA_0 や ACA_0^+ を導入しその計算論的性質を簡単に調べる．

4 節では以上の準備を下に ω モデル反映を定義し，既存の結果を紹介しつつ ACA_0 から ATR_0 周辺の様々な理論を分類する，

[*1] 証明したことがあれば最高だが，主張を理解していれば十分である．

2 準備

2.1 完全性定理

これから定義する二階算術の言語 L_2 は二領域一階言語（two-sorted first-order language）の一種であり，集合論や一階算術の言語とは異なりピュアな一階の言語ではない．二領域一階言語とは 2 種類の異なる対象を扱うための言語であり，二種類の変数記号を持つ．このような言語は，例えばベクトル空間におけるスカラーとベクトルのように，二つの異なる対象に同時に言及する必要がある数学的対象の記述に向いている．二階算術では自然数と自然数の部分集合（を用いて表現される数学的対象）を扱うために，L_2 は自然数用の変数記号と自然数の部分集合用の変数記号を持っている．

二階算術の言語がピュアな一階の言語でない，という記述からまず心配になるのは完全性定理の成立だろう．もし完全性定理が使えなければ，ある理論から何かが証明可能であることを示す際にモデルを用いた議論が一階の場合と同様には行えない．しかし幸いなことに，そのような心配は杞憂である．実際には完全性定理をはじめ，コンパクト性定理やレーベンハイム-スコーレムの定理など一階述語論理の強力な定理たちがすべて成立する．

後ほど詳しく説明するが，L_2 に関する完全性定理の本稿での正当化手順を本節の導入も兼ねて手短に説明しておこう．まず L_2 の論理式を一階の論理式に変換する埋め込み I を定義する．厳密には異なるが，大雑把にはこの I を用いて論理的帰結関係 $T \models \varphi$ を一階の $T^I \models \varphi^I$[*2] と同値になるように定義し，証明可能関係 $T \vdash \varphi$ を一階の $T^I \vdash \varphi^I$ で定義する．すると一階述語論理の完全性定理から $T^I \models \varphi^I \Leftrightarrow T^I \vdash \varphi^I$ は正しいので $T \models \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$ が得られる．このようにして新たな証明体系を用意することなく一階述語論理の完全性定理に帰着することで L_2 における完全性定理は正当化される[*3]．

定義 2.1 (言語 L_2)**.** 二階算術の言語 L_2 は次からなる．

- 論理記号
  - 命題結合子 $\wedge, \vee, \neg$
  - 等号 $=$
  - 量化子 $\forall, \exists$
  - 数変数記 $\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_i, ...$
  - 集合変数 $\mathsf{V}_0, \mathsf{V}_1, ..., \mathsf{V}_i, ...$
  - 括弧 $(,)$
- 非論理記号
  - 定数 $0, 1$

*2 $T^I = \{ \sigma^I \mid \sigma \in T \}$.

*3 他の二領域，あるいは一般の多領域の言語に関する完全性定理も本稿と同様の方法で正当化できる．

– 2 変数関数 $+, \cdot$
– 2 項関係 $<, \in$

実際には $x, y, z, a, b, c, m, n, v, w, i, j, k$ などの小文字を用いて数変数を表し，X, Y, A, B, V などの大文字を用いて集合変数を表す[*4]．具体的な数を指定せず，適当な有限個の変数を表わしたいときは $\overline{x}$ と表記する．形式的にはこれは何かしらの $n \in \omega$ における $x_1, ..., x_n$ の略記である．括弧には , や [,] なども用いる．また，他の命題結合子はすべて略記として導入する．例えば $\varphi \to \psi$ は $\neg\varphi \vee \psi$ の略記である．以降括弧は適宜省略する．

定義 2.2 (数項)**.** 数項 (numerical term) を次のように再帰で定める．

- 数変数，$0, 1$ は数項である．
- s, t が数項のとき，$s + t, s \cdot, t$ も数項である．

数項は単に項とよぶことが多い[*5]．また, 2 を (1+1) の略記とし, 3 を (2+1), すなわち ((1+1)+1) の略記とする．他の自然数についても同様である．他にも，数変数 i を用いて $3i$ と書いたときは $i + i + i$ を表すとする．3 以外の自然数についても同様である．

定義 2.3. L_2 の論理式を次のように再帰で定める．

- s, t を数項としたとき，$s < t, s = t, s \in X$ は論理式である．これらを原子論理式とよぶ[*6]．
- φ, ψ が論理式のとき，$\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \neg\varphi, \forall n\varphi, \exists n\varphi, \forall X\varphi, \exists X\varphi$ は論理式である．

また，論理式 φ に含まれるすべての変数が量化子によって束縛されているとき，φ は閉論理式，あるいは文という．文の集合を理論という．

$s \leq t$ は $s < t \vee s = t$ の略記として導入する．

例 2.4. 例えば”X は偶数の集合である”を素朴に論理式で書くと $\forall n(n \in X \leftrightarrow \exists i(n = 2i))$ となる．形式的には次のように書ける．

$$\forall \mathsf{v}_0((\neg(\mathsf{v}_0 \in \mathsf{V}_2) \vee (\exists \mathsf{v}_1(\mathsf{v}_0 = (\mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_1))) \wedge ((\mathsf{v}_0 \in \mathsf{V}_2) \vee \neg(\exists \mathsf{v}_1(\mathsf{v}_0 = (\mathsf{v}_1 + \mathsf{v}_1))))))$$

定義 2.5 (L_2 構造)**.** L_2 構造（または L_2 モデル）とは次の 7 つ組 M のことをいう．

$$(|M|, \mathcal{S}_M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$$

ただしここで M は以下を満たす．

- $|M|$ は空でない集合．

[*4] 関数を表わす際には小文字の f, g, h なども用いる．
[*5] 項は言語を定めると自動的に定まる概念だが，わざわざ”数”項を定めた理由は $1 + X$ などの文字列を排除するためである．
[*6] $X = Y$ は原子論理式から除外し，$\forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y)$ の略記と見なす．

- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(|M|)$.
- $+_M, \cdot_M$ は $|M|$ 上の二変数関数.
- $0_M, 1_M$ は $|M|$ の異なる要素.
- $<_M$ は $|M|$ 上の二項関係.
- $\in$ は通常の所属関係である（それゆえ $\in^M$ と明記していない).

また，$\mathcal{S}_M$ を除いた $(|M|, \mathcal{S}_M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$ を M の一階部分（first-order part）とよぶ．対称的に，$\mathcal{S}_M$ を M の二階部分（second-order part）とよぶ．$|M|$ を $\mathbb{N}^M$ と書くこともある．

注意 2.6. [Sim09] とは異なり，本稿では $\mathcal{S}_M = \varnothing$ の場合も L_2 構造として認めるが，それを認めない場合の完全性定理の証明は以降の議論で一カ所変更を行うだけで済む．実際，$\mathcal{S}_M \neq \varnothing$ を L_2 構造の条件に課す場合は定義 2.17 の II に $\exists x(S(x))$ を付け加えればあとはすべて同様である．

本稿のように定義する理由は，L_2 理論を分離する際に $\mathcal{S}_M = \varnothing$ である構造が反例として認められる べきだと筆者が考えているためである．

定義 2.7 (ω 部分構造)**.** N, M を L_2 構造とする．N が M の ω 部分構造，あるいは ω 部分モデルであるとは，N と M が同じ一階部分をもち，かつ $\mathcal{S}_N \subseteq \mathcal{S}_M$ を満たすことをいう．このとき $N \subseteq_\omega M$ と表記する．

注意 2.8. ω 部分モデルでない部分モデルというのも原理的には考えられるが，[Sim09] にも定義はない．

定義 2.9. L_2 構造 $(\omega, \mathcal{P}(\omega), +, \cdot, 0, 1, <)$ を意図したモデル（intended model）という． ここで $\mathcal{P}(\omega)$ は ω の部分集合全体であり，$+, \cdot, <$ は日本の義務教育で習う自然数上の足し算，かけ算，大小関係である．この意図したモデルの ω 部分モデルを ω モデルという．ω モデルは通常その二階部分で代表して書き表す．例えば意図したモデルの場合は $\mathcal{P}(\omega)$ である．

例 2.10. 二階部分に計算可能集合全体を据えた ω モデルを $\mathrm{REC}(\subseteq_\omega \mathcal{P}(\omega))$ で表す．REC は後に定義する L_2 理論 RCA_0 の最小の ω モデルである．

ω モデルでない L_2 構造，すなわち非 ω モデル（non-ω-model）の例も出しておこう．

例 2.11. 一階算術の標準構造，つまり意図したモデルの一階部分 $(\omega, +, \cdot, 0, 1, <)$ を N で表わし，N で正しい一階算術の文[*7]全体を TA と書く．このとき，c を新たな定数記号とすると理論 $\{c > n \mid n \in \omega\} \cup \mathsf{TA}$ はその任意の有限部分がモデルをもつ．したがってコンパクト性定理とレーベンハイム-スコーレムの下降定理からその全体の可算モデルが存在する．その一つを M としよう．このとき $(|M|, \mathcal{P}(|M|), +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$ は ω モデルではない．また，この一階部分は可算であるが，その $+_M, \cdot_M$ はどちらもテンネンバウムの定理[*8]から計算不可能である．

[*7] 一階算術の言語 L_1 は L_2 から集合変数と $\in$ を除いて得られる．

[*8] [田中 97] Theorem 15.1 や [Kay91] Theorem 11.7 に証明がある．

注意 2.12. 非 ω モデルは超準モデル（non-standard model）と呼ばれることが多い．

非 ω モデルは特に L_2 理論間の保存性を証明する際に登場する．本稿では非 ω モデルについては詳しく述べないため，詳細は [Sim09] の IX 章を参照されたい．

L_2 構造 M における真偽は通常通りタルスキの真理定義条項を満たす集合から定義する．

定義 2.13 (L_2 構造の初等ダイアグラム)**.** M を L_2 構造とし，M の各要素に対応する変数を加えた言語 $\mathrm{L}_2(|M| \cup \mathcal{S}_M) := \mathrm{L}_2 \cup \{\mathsf{c}_a \mid a \in |M|\} \cup \{\mathsf{C}_A \mid A \in \mathcal{S}_M\}$ を用意する．このとき，次の条件（タルスキの真理定義条項）を満たす唯一の $\mathrm{L}_2(|M| \cup \mathcal{S}_M)$ 文の集合を $\mathrm{eDiag}(M)$ と表記し，M の初等ダイアグラムとよぶ．

- $\mathrm{L}_2(|M| \cup \mathcal{S}_M)$ の原子文について以下が成り立つ．ただし以下で s, t は $\{\mathsf{c}_a \mid a \in |M|\}$ に含まれる定数が現れることを許した数項であり，$A \in \mathcal{S}_M$ である．
  - $(s < t) \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow s < t$.
  - $(s = t) \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow s = t$.
  - $(s \in \mathsf{C}_A) \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow s \in A$.
- $\varphi \wedge \psi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{eDiag}(M)$ かつ$\psi \in \mathrm{eDiag}(M)$.
- $\varphi \vee \psi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{eDiag}(M)$ または$\psi \in \mathrm{eDiag}(M)$.
- $\neg\varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow \varphi \notin \mathrm{eDiag}(M)$.
- $\forall x \varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow$ すべての $a \in |M|$ に対して$\varphi[\mathsf{c}_a/x] \in \mathrm{eDiag}(M)$.
- $\exists x \varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow$ ある $a \in |M|$ に対して$\varphi[\mathsf{c}_a/x] \in \mathrm{eDiag}(M)$.
- $\forall X \varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow$ すべての $A \in \mathcal{S}_M$に対して$\varphi[\mathsf{C}_A/X] \in \mathrm{eDiag}(M)$.
- $\exists X \varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow$ ある $A \in \mathcal{S}_M$に対して$\varphi[\mathsf{C}_A/X] \in \mathrm{eDiag}(M)$.

ここで $\varphi[\mathsf{c}_a/x]$ とは，φ 中の自由な x すべてを c_a で置き換えて得られる論理式である．$\varphi[\mathsf{C}_A/X]$ も同様に定める．

以降では文脈からそれと分かる場合には定数 c_a を単に a で表し，C_A も単に A で表す．この略記に併せて，今後は $\varphi[\mathsf{c}_a/X], \varphi[\mathsf{C}_A/X]$ をそれぞれ $\varphi(a), \varphi(A)$ で表す．

定義 2.14. L_2 構造 M について，$\mathrm{L}_2(|M| \cup \mathcal{S}_M)$ の文 φ が $\mathrm{eDiag}(M)$ に属すとき M は φ を充足するといい，$M \models \varphi$ と表記する．そうでないとき $M \not\models \varphi$ と書く．自由変数を含む論理式については，その全称閉包が $\mathrm{eDiag}(M)$ に属すか否かで充足を定める．L_2 理論 T について M が T のモデルであるとは，すべての $\sigma \in T$ について $M \models \sigma$ となることと定め，$M \models T$ と表記する．

定義 2.15. T を L_2 理論，σ を L_2 文とする．このとき，T を充足するすべての L_2 構造が σ も充足するとき，σ は T の帰結であるといい $T \models_2 \sigma$ と表記する．[*9]

定義 2.16 (言語 L_1^+)**.** 言語 L_1^+ は次からなる．

[*9] $\models_2$ は完全性定理を得るまでの一時的かつ本稿独自の記号であり，普通は下付きの 2 は書かない．

- 論理記号
  - 命題結合子 $\wedge, \vee, \neg$
  - 等号 $=$
  - 量化子 $\forall, \exists$
  - 数変数記 $\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_i, ...$
  - 括弧 $(,)$
- 非論理記号
  - 定数 $0, 1$
  - 2 変数関数 $+, \cdot$
  - 2 変数関係 $<, \in$
  - 1 変数関係 $N(*), S(*)$

M を L_1^+ 構造とするとき，特に関係記号 S の M での解釈 S_M は集合 $\{a \in |M| \mid M \models S(a)\}$ である．以降，この S_M の要素は大文字で書く．

定義 2.17. 次の L_1^+ 文からなる理論を II と書く．

- $N(0) \wedge N(1)$
- $\forall x, y(N(x) \wedge N(y) \to N(x+y) \wedge N(x \cdot y))$
- $\neg \exists x(N(x) \wedge S(x))$
- $\forall x(N(x) \vee S(x))$

定義 2.18 (構造の変換（$\mathrm{L}_1^+ \to \mathrm{L}_2$）)**.** M を $M \models \mathsf{II}$ なる L_1^+ 構造とする．このとき各 $A \in S_M$ について，集合 $\{a \in |M| \mid M \models a \in A\}$ を $\dot{A}$ と表記する．この約束の下で L_2 構造 M_{II} を以下で定める．

- $|M_{\mathsf{II}}| := \{a \in |M| \mid M \models N(a)\}$.
- $\mathcal{S}_{M_{\mathsf{II}}} := \{\ \dot{A} \mid A \in S_M\ \}$.
- $a, b \in |M_{\mathsf{II}}|$ について $a +_{M_{\mathsf{II}}} b := a +_M b$．乗算や大小関係，$0, 1$ の解釈も同様に M のそれで定義する．

逆向きの変換は次で定義する．

定義 2.19 (構造の変換（$\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_1^+$）)**.** M を L_2 構造とする．L_1^+ 構造 M^{I} を以下で定める．

- $|M^{\mathsf{I}}| := |M| \cup \mathcal{S}_M$.
- $0_{M^{\mathsf{I}}} = 0_M, 1_{M^{\mathsf{I}}} = 1_M$.
- $a, b \in |M^{\mathsf{I}}|$ について
  - $a +_{M^{\mathsf{I}}} b := \begin{cases} a +_M b & \text{if } a, b \in |M| \\ 0_M & \text{otherwise} \end{cases}$．乗算についても同様．

– $a <_{M^{\mathsf{I}}} b :\Leftrightarrow a, b \in |M| \ \&\ a <_M b$．すなわち $<_{M^{\mathsf{I}}} := <_M$
– $a \in_{M^{\mathsf{I}}} b :\Leftrightarrow a \in |M| \ \&\ b \in \mathcal{S}_M \ \&\ a \in b$．すなわち，$\in_{M^{\mathsf{I}}} := \in$．

数項に含まれる数変数の添え字を 2 倍にする関数を I_2 とする．例えば $I_2(\mathsf{v}_3 + 0) = \mathsf{v}_6 + 0$．

定義 2.20. L_2 論理式 φ から L_1^+ 論理式への変換 φ^I を以下のように再帰で定める．

- s, t が数項のとき，
  - $(s < t)^I := I_2(s) < I_2(t)$
  - $(s < t)^I := I_2(s) = I_2(t)$
  - $(s \in \mathsf{V}_i)^I := I_2(s) \in \mathsf{v}_{2i+1}$
- φ, ψ が L_2 論理式のとき，
  - $(\varphi \wedge \psi)^I := \varphi^I \wedge \psi^I$
  - $(\varphi \vee \psi)^I := \varphi^I \vee \psi^I$
  - $(\neg\varphi)^I := \neg(\varphi^I)$
  - $(\forall \mathsf{v}_i \varphi)^I := \forall \mathsf{v}_{2i}(N(\mathsf{v}_{2i}) \to \varphi^I)$
  - $(\exists \mathsf{v}_i \varphi)^I := \exists \mathsf{v}_{2i}(N(\mathsf{v}_{2i}) \wedge \varphi^I)$
  - $(\forall \mathsf{V}_i \varphi)^I := \forall \mathsf{v}_{2i+1}(S(\mathsf{v}_{2i+1}) \to \varphi^I)$
  - $(\exists \mathsf{V}_i \varphi)^I := \exists \mathsf{v}_{2i+1}(S(\mathsf{v}_{2i+1}) \wedge \varphi^I)$

命題 2.21. M を L_2 構造，N を L_1^+ 構造とし，σ を L_2 文とする．このとき次が成り立つ．

- $M \models \sigma \Rightarrow M^{\mathsf{I}} \models \sigma^I + \mathsf{II}$
- $N \models \sigma^I + \mathsf{II} \Rightarrow N_{\mathsf{II}} \models \sigma$

証明. パラメータを許した論理式の構成に関する帰納法． □

定義 2.22. M, N を L_1^+ 構造とする．すべての L_2 文 σ に対して

$$M \models \sigma^I \Leftrightarrow N \models \sigma^I$$

が成り立つとき $M \equiv_{\mathrm{L}_2} N$ と表記する．

系 2.23. L_1^+ 構造 N が II を満たすとき $N \equiv_{\mathrm{L}_2} (N_{\mathsf{II}})^{\mathsf{I}}$ が成り立つ．

系 2.24. L_2 理論 T と L_2 文 τ に対して次が成り立つ．

$$T \models_2 \tau \Leftrightarrow T^I + \mathsf{II} \models \tau^I$$

定義 2.25. 何かしら一階述語論理の証明体系を固定して証明可能関係 $\vdash$ を定義し，L_2 理論 T と L_2 文 σ に関する証明可能関係 $T \vdash \sigma$ を $T^I + \mathsf{II} \vdash \sigma^I$ によって定義する．

定理 2.26 (完全性定理)**.** L_2 理論 T と L_2 文 σ に対して次が成り立つ．

$$T \models_2 \sigma \Leftrightarrow T \vdash \sigma$$

以降 $\models_2$ を単に $\models$ と書く．

コンパクト性定理も示しておこう．

系 2.27. 任意の L_2 理論 T について以下が同値．

- T が（L_2 構造の）モデルを持つ．
- $T^I + \mathsf{II}$ が（L_1^+ 構造の）モデルを持つ．

証明. 命題 2.21 から即座に従う． □

定理 2.28 (コンパクト性定理)**.** L_2 理論 T について次の二つは同値．

- T がモデルを持つ．
- T のすべての有限部分集合がモデルを持つ．

証明. 先の系と一階述語論理のコンパクト性定理から従う． □

コンパクト性定理と同様に，レーベンハイム-スコーレムの定理も一階述語論理のそれに帰着することで証明できる．

定理 2.29 (レーベンハイム-スコーレムの下降定理)**.** L_2 構造 M は $\mathcal{S}_M$ が無限集合であるとする．このとき，任意の $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}_M$ について，以下すべてを満たす L_2 構造 N が存在する．

- $N \subseteq_\omega M$.
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}_N$.
- $\mathrm{card}(\mathcal{S}_N) \leq \mathrm{card}(\mathcal{A}) + \aleph_0$.
- 任意の $\mathrm{L}_2(|N| \cup \mathcal{S}_N)$ 文 φ について $N \models \varphi \Leftrightarrow M \models \varphi$.

ここで $\mathrm{card}(X)$ は X の濃度を表わす．

2.2 可算 ω モデルのコード化

複雑な対象を比較的シンプルな別の対象によって枚挙できたとき，計算論ではしばしばそのシンプルな方をコードとよぶのだった．例えば，Φ を万能マシンとすると $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ は部分計算可能関数の枚挙であり，$f = \Phi_e$ であるとき e は部分計算可能関数 f のコードである，あるいは f をコードしているという．そして関数 f は自然数 e によってコードされているという言い回しをする．もう一つ重要な例を出そう．$Y \subseteq \omega$ に対する n 成分への射影を $Y_n = \{\, m \mid (m,n) \in Y \,\}$ で定める[*10]．このとき，$\mathcal{P}(\omega) \ni Y \mapsto \{Y_n\}_{n\in\omega}$ は自然数の部分集合から自然数の可算部分集合族への全射[*11]，すなわち枚挙である．よってこの場合，集合 Y を族 $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ のコードと見なせる．

[*10] ここで (m,n) はペアリング $(m,n) = (m+n)^2 + m$ である．

[*11] $\{A_0, A_1, ...\} \mapsto \{\, m \mid m \in A_n \,\}$ が単射といった方が分かりやすいかもしれない．

ところで，ω モデルとは次のような L_2 構造だった．

$$(\omega, M, 0, 1, +, \cdot, <) \quad \text{where} \quad M \subseteq \mathcal{P}(\omega).$$

この定義から $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) \ni M \leftrightarrow (\omega, M, 0, 1, +, \cdot, <) \in \omega$モデル全体 は全単射である．一方で ω モデルを可算なものだけに制限すれば先の可算集合族の例から分かるように次が全射になる．

$$\mathcal{P}(\omega) \ni M \mapsto (\omega, \{M_n\}_{n\in\omega}, 0, 1, +, \cdot, <) \in \text{可算}\omega\text{モデル全体}$$

したがって自然数の部分集合は可算 ω モデルのコードとみなせる．アプリオリには自然数と自然数の部分集合のみを扱える二階算術ではこのコード化を経由することで可算 ω モデルを議論の俎上に載せる．すなわち，一つの自然数の部分集合 $M \subseteq \omega$ を，それがコードしている可算 ω モデル $(\mathbb{N}, \{M_n\}_{n\in\omega}, 0, 1, +, \cdot, <)$ と同一視する．

次に考えたいことは可算 ω モデルにおける真偽の取り扱いである．構造における真偽を定義するとは，初等ダイアグラムを定義することなのであった．初等ダイアグラムの定義 2.13 をコード化された ω モデル用に書き直すと次のようになる．集合量化 $(\forall X \ldots)$ の真偽が数の量化 $(\forall n \in \omega \ldots)$ に還元されている点が重要である．

定義 2.30 (可算 ω モデルの初等ダイアグラム)**.** $M \subseteq \omega$ を可算 ω モデルのコードとする．M の初等ダイアグラムとは，集合定数を可算個付け加えた言語 $\mathrm{L}_2 \cup \{\, \mathsf{C}_n \mid n \in \omega \,\}$ の論理式について次の条件（タルスキの真理定義条項）を満たす唯一の集合 $\mathrm{eDiag}(M)$ である．

- 原子文について以下が成り立つ．ただし以下で t, s は数項，C_n は集合定数である．
  - $(t < s) \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow t < s$ が真
  - $(t = s) \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow t = s$ が真
  - $(t \in \mathsf{C}_n) \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow t \in M_n$が真
- $\neg\varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow \varphi \notin \mathrm{eDiag}(M)$
- $\varphi \wedge \psi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{eDiag}(M)$ かつ$\psi \in \mathrm{eDiag}(M)$
- $\varphi \vee \psi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{eDiag}(M)$ または$\psi \in \mathrm{eDiag}(M)$
- $\forall x\varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow$ すべての $n \in \omega$に対して$\varphi[n/x] \in \mathrm{eDiag}(M)$
- $\exists x\varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow$ ある $n \in \omega$に対して$\varphi[n/x] \in \mathrm{eDiag}(M)$
- $\forall X\varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow$ すべての $n \in \omega$に対して$\varphi[\mathsf{C}_n/X] \in \mathrm{eDiag}(M)$
- $\exists X\varphi \in \mathrm{eDiag}(M) \Leftrightarrow$ ある $n \in \omega$に対して$\varphi[\mathsf{C}_n/X] \in \mathrm{eDiag}(M)$

また $\mathrm{eDiag}(M)$ のうち原子文と原子文の否定だけを集めた集合を（基本）ダイアグラムといい $\mathrm{Diag}(M)$ で表す．

注意 2.31. $\rightarrow$ は正式な記号としては導入していない．

この $\mathrm{eDiag}(M)$ を再帰的に構成する方法を考えよう．一見すると，正しい原子文全体の集合を種にしてタルスキの真理定義条項に従って再帰的に構成できそうに見える．しかし素直にタルスキ

の真理定義条項に従った再帰的定義では失敗する．実際，以下の素直な再帰的定義では Y_1' にほとんど全ての論理式の否定が入ってしまい，初等ダイアグラムにはならない．

$$
\begin{aligned}
Y_0' &= \{\,\varphi \mid \varphi \text{ は正しい原子文}\,\} \\
Y_{n+1}' &= \{\varphi \mid \varphi \in Y_n \text{ or} \\
&\qquad\qquad \text{ある}\psi\text{が存在して } (\varphi = \neg\psi \wedge \psi \notin Y_n') \text{ or} \\
&\qquad\qquad \text{ある}\varphi_0, \varphi_1\text{が存在して } (\varphi = \varphi_0 \wedge \varphi_1 \ \& \ \varphi_0 \in Y_n' \ \& \ \varphi_1 \in Y_n') \text{ or} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad \text{ある}\psi, V_k\text{が存在して } (\varphi = \forall V_k\psi \ \& \ \text{すべての } n \in \omega \text{ で} \psi[\mathsf{C}_n/V_k] \in Y_n')\} \\
\textstyle\bigcup_{n\in\omega} Y_n' &\neq \mathrm{eDiag}(M)
\end{aligned}
$$

それゆえ，否定を再帰のベースステップで処理する必要がある．具体的には $\mathrm{Diag}(M)$ からはじめて再帰の途中では先頭 $\neg$ の論理式を一旦無視して集合を構成する．

定義 2.32 (コード化 ω モデルの否定標準形論理式からなる初等図式の再帰的構成．)．$\{Y_n\}_{n\in\omega}$ を次で定める列とする．

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= \mathrm{Diag}(M) \\
Y_{n+1} &= \{\varphi \mid \varphi \in Y_n \text{ or} \\
&\qquad\qquad \text{ある}\varphi_0, \varphi_1\text{が存在して } (\varphi = \varphi_0 \wedge \varphi_1 \ \& \ \varphi_0 \in Y_n \ \& \ \varphi_1 \in Y_n) \text{ or} \\
&\qquad\qquad \text{ある}\varphi_0, \varphi_1\text{が存在して } (\varphi = \varphi_0 \vee \varphi_1 \ \& \ \varphi_0 \in Y_n \text{ or } \varphi_1 \in Y_n) \text{ or} \\
&\qquad\qquad \text{ある}\psi, v_k\text{が存在して } (\varphi = \forall v_k\psi \ \& \ \text{すべての } n \in \omega \text{ で} \psi[n/v_k] \in Y_n) \text{ or} \\
&\qquad\qquad \text{ある}\psi, v_k\text{が存在して } (\varphi = \exists v_k\psi \ \& \ \text{ある } n \in \omega \text{ で} \psi[n/v_k] \in Y_n) \text{ or} \\
&\qquad\qquad \text{ある}\psi, v_k\text{が存在して } (\varphi = \forall V_k\psi \ \& \ \text{すべての } n \in \omega \text{ で} \psi[\mathsf{C}_n/V_k] \in Y_n) \text{ or} \\
&\qquad\qquad \text{ある}\psi, V_k\text{が存在して } (\varphi = \exists V_k\psi \ \& \ \text{ある } n \in \omega \text{ で} \psi[\mathsf{C}_n/V_k] \in Y_n)\}
\end{aligned}
$$

勿論，$\neg$ を再帰の途中で考えていないため $\bigcup_{n\in\omega} Y_n$ には $\mathrm{eDiag}(M)$ のうち否定標準形のものしか入っていない．しかし否定標準形のものは過不足無く入っているため，否定標準形への変換を考えそれによる逆像を取ることで $\mathrm{eDiag}(M)$ を復元できる．形式的に議論しよう．ド・モルガンの法則と二重否定の除去を可能な限り適用することで与えられた論理式を否定標準形へ変換する関数

NNF: $\mathrm{L}_2 \cup \{\mathsf{C}_n | n \in \omega\}$ 論理式 $\to \mathrm{L}_2 \cup \{\mathsf{C}_n | n \in \omega\}$ 論理式 が以下のように再帰で定まる．

$$\mathrm{NNF}(\varphi) = \begin{cases} \varphi & \text{if } \varphi \text{ が原子文，あるいは原子文の否定}, \\ \mathrm{NNF}(\varphi_0) \wedge \mathrm{NNF}(\varphi_1) & \text{if ある}\varphi_0, \varphi_1\text{が存在して}\varphi = \varphi_0 \wedge \varphi_1, \\ \mathrm{NNF}(\varphi_0) \vee \mathrm{NNF}(\varphi_1) & \text{if ある}\varphi_0, \varphi_1\text{が存在して}\varphi = \varphi_0 \vee \varphi_1, \\ \forall v_k \mathrm{NNF}(\psi) & \text{if ある}\psi, v_k\text{が存在して}\varphi = \forall v_k \psi, \\ \exists v_k \mathrm{NNF}(\psi) & \text{if ある}\psi, v_k\text{が存在して}\varphi = \exists v_k \psi, \\ \forall V_k \mathrm{NNF}(\psi) & \text{if ある}\psi, V_k\text{が存在して}\varphi = \forall V_k \psi, \\ \exists V_k \mathrm{NNF}(\psi) & \text{if ある}\psi, V_k\text{が存在して}\varphi = \exists V_k \psi, \\ \mathrm{NNF}(\neg\varphi_0) \vee \mathrm{NNF}(\neg\varphi_1) & \text{if ある}\varphi_0, \varphi_1\text{が存在して}\varphi = \neg(\varphi_0 \wedge \varphi_1), \\ \mathrm{NNF}(\neg\varphi_0) \wedge \mathrm{NNF}(\neg\varphi_1) & \text{if ある}\varphi_0, \varphi_1\text{が存在して}\varphi = \neg(\varphi_0 \vee \varphi_1), \\ \exists v_k \mathrm{NNF}(\neg\psi) & \text{if ある}\psi, v_k\text{が存在して}\varphi = \neg\forall v_k \psi, \\ \forall v_k \mathrm{NNF}(\neg\psi) & \text{if ある}\psi, v_k\text{が存在して}\varphi = \neg\exists v_k \psi, \\ \exists V_k \mathrm{NNF}(\neg\psi) & \text{if ある}\psi, V_k\text{が存在して}\varphi = \neg\forall V_k \psi, \\ \forall V_k \mathrm{NNF}(\neg\psi) & \text{if ある}\psi, V_k\text{が存在して}\varphi = \neg\exists V_k \psi, \\ \mathrm{NNF}(\psi) & \text{if ある}\psi\text{が存在して}\varphi = \neg\neg\psi. \end{cases}$$

このとき，$\mathrm{NNF}^{-1}[\bigcup_{n\in\omega} Y_n] = \{\, \varphi \mid \mathrm{NNF}(\varphi) \in \bigcup_{n\in\omega} Y_n \,\}$ は正しい原子文を全て含みタルスキの真理定義条項を満たす．例えば $\mathrm{NNF}(\neg\varphi) \in \bigcup_{n\in\omega} Y_n \Leftrightarrow \mathrm{NNF}(\varphi) \notin \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ が成り立つことは論理式の構成に関する帰納法で示すことができる．同一の基本ダイアグラムを含み，可算 ω モデルに関するタルスキの真理定義条項を満たす集合は唯一であるため $\mathrm{NNF}^{-1}[\bigcup_{n\in\omega} Y_n] = \mathrm{eDiag}(M)$ が成り立つ．

3 二階算術の形式的体系と計算論

3.1 RCA_0 の基本事項

二階算術の部分体系を議論する際に土台[*12]となる RCA_0 を導入する．大雑把に言えば，足し算かけ算などの基礎的な算術に関する公理（PA^-），若干の数学的帰納法（Σ^0_1 帰納法公理）に，与えられたデータベースを用いて所属判定が計算可能に行える集合の存在を要請する公理（再帰的内包公理）からなる．

定義 3.1. 以下の表で t は x を含まない数項である．この表に現れるような数変数の量化のことを有界（bounded）な数量化という．そうでない数量化を非有界数量化という．

定義 3.2 (Δ^0_0 論理式)**.** L_2 論理式 θ が Δ^0_0 であるとは，集合変数の量化を含まず，その論理式に含まれる数変数の量化がすべて有界であることをいう．

例 3.3. $\forall x < 3 \exists n \leq 2x(1 + n \in Z)$ は Δ^0_0 論理式.

[*12] RCA_0 より弱い理論を土台にして RCA_0 の強さを図る，といった取り組みももちろんある．

略記	正式
$\forall x < t(...)$	$\forall x(x < t \to ...)$
$\forall x \leq t(...)$	$\forall x(x \leq t \to ...)$
$\exists x < t(...)$	$\exists x(x < t \wedge ...)$
$\exists x \leq t(...)$	$\exists x(x \leq t \wedge ...)$

定義 3.4 ($\Sigma^0_k, \Pi^0_k, \Sigma^1_k, \Pi^1_k$ 論理式)**.** L_2 論理式のうち，$\Sigma^0_k, \Pi^0_k, \Sigma^1_k, \Pi^1_k$ 論理式とよばれるものはそれぞれ以下のように論理式の形によって定義される．

$$\begin{array}{llr} \Sigma^0_k & \cdots \exists x_1 \forall x_2 .... Q x_k \theta & \text{where } \theta \in \Delta^0_0 \\ \Pi^0_k & \cdots \forall x_1 \exists x_2 .... Q x_k \theta & \text{where } \theta \in \Delta^0_0 \\ \Sigma^1_k & \cdots \exists X_1 \forall X_2 .... Q X_k \varphi & \text{where } \varphi \in \Sigma^0_n \text{ for some } n \in \omega \\ \Pi^1_k & \cdots \forall X_1 \exists X_2 .... Q X_k \varphi & \text{where } \varphi \in \Sigma^0_n \text{ for some } n \in \omega \end{array}$$

また，Σ^0_k 論理式はそれが L_1 論理式でもあるとき，すなわち集合変数を含まないとき Σ_k 論理式という．Δ_0, Π_k も同様に定める．

定義 3.5. 次の 15 個の L_1 文からなる理論を PA$^-$ という．

Ax1 $\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))$

Ax2 $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

Ax3 $\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

Ax4 $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

Ax5 $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

Ax6 $\forall x((x + 0 = x) \wedge (x \cdot 0 = 0))$

Ax7 $\forall x(x \cdot 1 = x)$

Ax8 $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$

Ax9 $\forall x(\neg(x < x))$

Ax10 $\forall x \forall y(x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x)$

Ax11 $\forall x \forall y \forall z(x < y \to x + z < y + z)$

Ax12 $\forall x \forall y \forall z(0 < z \wedge x < y \to x \cdot z < y \cdot z)$

Ax13 $\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x + z = y))$

Ax14 $0 < 1 \wedge \forall x(x > 0 \to x \geq 1)$

Ax15 $\forall x(x \geq 0)$

注意 3.6. PA$^-$ は Σ_1 完全である．つまり，正しい Σ^0_1 文をすべて証明する[*13]．

[*13] Σ_1 完全性に関しては PA$^-$ はやや冗長である．このような話題や Σ_1 完全性の証明などは例えば [田中 19] 4 章を参照せよ．

定義 3.7 (帰納法公理と $\mathsf{I}\Sigma^0_1$)**.** L_2 論理式 φ について，次の論理式の全称閉方を n, φ に関する帰納法公理といい，$I_n\varphi$ とかく．

$$\varphi(0) \land \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n \varphi(n)$$

$\mathsf{I}\Sigma^0_1$ とは次の L_2 理論である．

$$\mathsf{PA}^- \cup \{\, I_n\varphi \mid \varphi \in \Sigma^0_1, n \text{ は} \varphi \text{ に含まれる自由数変数} \,\}$$

注意 3.8. $\varphi(n)$ が自由変数に集合変数を持つとき，$I_n\varphi$ は Π^1_1 論理式である．

次の帰納法の言い換えはよく使われる．

命題 3.9. L_2 論理式 $\varphi(x)$（他に変数を含んでよい）に関して，下記のような形の論理式にそれぞれ名前を付ける．

z までの帰納法公理	$\forall z(\varphi(0) \land \forall x < z(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \leq z \varphi(x))$	(3.1)
最小値原理	$\exists x \varphi(x) \to \exists z(\varphi(z) \land \forall w < z \neg\varphi(w))$	(3.2)
累積帰納法公理	$\forall z((\forall w < z \varphi(w)) \to \varphi(z)) \to \forall x \varphi(x)$	(3.3)

ここで式 (3.1) の論理式（厳密にはその全称閉包）を $U_x\varphi$，式 (3.2) の論理式を $L_x\varphi$，式 (3.3) の論理式を $T_x\varphi$ と表記する*14．ただし，帰納法変数が明らかなときは下付きの $_x$ を省略する．

以上それぞれの図式は PA^- 上で互いに同値であり，さらに任意の $\varphi \in \Sigma^0_1 \cup \Pi^0_1$ について $\mathsf{I}\Sigma^0_1 \vdash I\varphi, U\varphi, T\varphi, L\varphi$ が成り立つ．

証明. 例えば [Kay91] 4.1 説を見よ*15． □

定義 3.10 (再帰的内包公理と RCA_0)**.** 集合変数 X を自由変数にもたない Σ^0_1 論理式 φ および Π^0_1 論理式 ψ について，次の全称閉方を $Rca_{\varphi,\psi,X,n}$ とかき，φ, ψ, n, X に関する再帰的内包公理という．

$$\forall n(\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n)) \to \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$$

$$\mathsf{RCA}_0 := \mathsf{I}\Sigma^0_1 \cup \{\, Rca_{\varphi,\psi,X,n} \mid \varphi, \psi, X, n \text{ は上記の条件を満たす．} \}$$

注意 3.11. $n = n$ に内包公理を適用して得られる集合，つまり形式的体系内部の自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書き，メタの自然数全体 ω とは区別する．ω モデルでは $\mathbb{N}$ の解釈が ω に一致するが，非 ω モデルでは $\mathbb{N}^M = |M| \neq \omega$ である．ただし，PA^- の非 ω モデルにおいては（埋め込み*16による同一視の下で）$\omega \subsetneq \mathbb{N}^M$ である．

次は論理式の複雑性と計算可能性に橋を架ける有名な定理である．

---

*14 記号の由来はそれぞれの英語にある．帰納法は Induction，z までの帰納法は Induction up to z，最小値原理は Least number principle，累積帰納法は Total induction の訳である．

*15 [橋本 22a] の 3.1 節に詳しく書いた．

*16 $\omega \ni n \mapsto \underbrace{1_M +_M 1_M +_M \cdots +_M 1_M}_{n \text{ 個}} \in |M|$

補題 3.12 (相対化された Post の定理（の一部）)**.** $A, B \subseteq \omega$ について，次が同値[*17].

- $B \leq_{\mathrm{T}} A$. つまり，B は A 上計算可能.
- B が A 上 Δ^0_1 定義可能．つまり，自由変数として高々 x, X のみを持つ Σ^0_1 論理式 $\varphi(x, X)$ と Π^0_1 論理式 $\psi(x, X)$ で次を満たすものが存在する.

$$n \in B \Leftrightarrow \varphi(n, A) \Leftrightarrow \psi(n, A) \text{ for all } n \in \omega$$

命題 3.13. $\varnothing \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ について以下同値.

1. $(\omega, \mathcal{S}, +, \cdot, 0, 1, <) \models \mathsf{RCA}_0$
2. $\mathcal{S}$ が Turing イデアルである．つまり，以下の 2 条件を満たす.
   計算論的和に閉じる: $A, B \in \mathcal{S}$ に対して $A \oplus B$[*18] $\in \mathcal{S}$.
   Turing 還元に閉じる: $A \in \mathcal{S}$ に対し，任意の $B \leq_{\mathrm{T}} A$ について $B \in \mathcal{S}$.

証明. $(1 \Rightarrow 2)$ 計算論的和に閉じることは明らか．$B \leq_{\mathrm{T}} A \in \mathcal{S}$ のとき，相対化された Post の定理から B は A を用いて Δ^0_1 定義可能であるので再帰的内包公理により $B \in \mathcal{S}$.

$(2 \Rightarrow 1)$ ω モデルは常に PA^- とすべての L_2 論理式に関する帰納法を充足するので再帰的内包公理のみ確認すればよい．まずパラメータが一つであるような論理式については相対化された Post の定理から明らか．一般に，$A_0, A_1 \in \mathcal{S}$ が含まれた論理式 $\varphi(x, A_0, A_1)$ は，その論理式中すべての $t \in A_0$ を $2t \in X$ に書き直し，同様にすべての $s \in A_1$ を $2s + 1 \in X$ に書き直すことで得られる論理式 $\varphi'(x, X)$ を取れば $\varphi(n, A_0, A_1) \Leftrightarrow \varphi'(n, A_0 \oplus A_1)$ がすべての $n \in \omega$ で成り立つ．この事実を利用することで帰納的に任意有限個集合パラメータを含んだ論理式に関する再帰的内包公理の成立が確認できる. □

系 3.14. 二階部分が計算可能集合全体である ω モデル REC は RCA_0 の最小の ω モデルである．また各 $X \subseteq \omega$ について $\mathrm{REC}(X) := \{ Y \subseteq \omega \mid Y \leq_{\mathrm{T}} X \}$ が X を含む最小の RCA_0 の ω モデルである.

注意 3.15. 以降で命題，補題，定理の隣に（RCA_0）と表記した場合は RCA_0 で正しい（証明可能である）ことを表わす．同様に，定義の隣に（RCA_0）と表記した場合，RCA_0 内部で定義していることを表わす．例えば定義に含まれる「$\varphi(k)$ を満たす各自然数 k について...」という文言は，$\mathsf{RCA}_0 \vdash \forall k(\varphi(k) \to ....)$ の略記ということである．この表記法は本稿に限らず広く使われている.

3.2 素朴集合論の形式化

まずは数学にとっての水や空気である素朴集合論を RCA_0 で展開しよう.

---

*17 例えば [田中 19] Lemma 4.3.7 や [Kay91] Corollary 3.5 に証明がある.
*18 $A \oplus B := \{ 2n \mid n \in A \} \cup \{ 2n + 1 \mid n \in B \}$.

定義 3.16 (RCA$_0$)**.** メタ有限個の数のペアリング関数を以下のように定める．

$$(i,j) = (i+j)^2 + i$$
$$(i_1, ..., i_{n+1}) = ((i_1, i_2, ..., i_n), i_{n+1}) \quad \text{where } 1 \leq n \in \omega$$

そして集合 $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ の直積を以下で定める[*19]．

$$X \times Y := \{ (i,j) \mid i \in X \land j \in Y \}$$
$$X^{n+1} := X^n \times X \quad \text{where } 1 \leq n \in \omega$$

定義 3.17 (RCA$_0$)**.** $k \in \omega$ とする．$X, Y \subseteq \mathbb{N}$ とし，以下を満たす $f \subseteq X^k \times Y$ を（X から Y への）k 変数部分関数とよび，$f \colon X^k \to Y$ と表記する．

$$\forall x_1, ..., x_k \in X, y, y'((x_1, ..., x_k, y) \in f \land (x_1, ..., x_k, y') \in f \to y = y' \in Y)$$

$(x_1, ..., x_k, y) \in f$ なる（唯一の）y が存在するとき，その y を $f(x_1, ..., x_k)$ で表す．上記に加えてさらに $\forall x_1, ..., x_k \in X \exists y \in Y((x_1, ..., x_k, y) \in f)$ が成り立つとき，f を（X 上の）全域関数，あるいは単に（X 上の）関数という．

以降では主として $X = Y = \mathbb{N}$ の場合を考える．また，単に全域関数，といった場合は $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ なる全域関数を表わすとする．

定義 3.18 (RCA$_0$)**.** $f, g \colon X^k \to Y$ を部分関数とし，$\overline{x} \in X^k$ とする．

- f が $\overline{x}$ で定義されているとき，すなわち $\exists y \in Y((\overline{x}, y) \in f)$ が成り立つとき $f(\overline{x}) \downarrow$ と書く．
- f が全域的でない場合には $f(\overline{x}) = y$ の別表記として $f(\overline{x}) \downarrow= y$ も用いる．
- f が $\overline{x}$ で定義されていないとき $f(\overline{x}) \uparrow$ と書く．
- $f(\overline{x}) \simeq g(\overline{x})$ を $\forall y(f(\overline{x}) = y \leftrightarrow g(\overline{x}) = y)$ の略記とする．

注意 3.19 (RCA$_0$)**.** 部分関数 $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ について $f = g \leftrightarrow \forall \overline{x}(f(\overline{x}) \simeq g(\overline{x}))$

例 3.20 (RCA$_0$，カントールの対関数)**.** ペアリングはすでに定義したが，あれは $\mathbb{N}$ への全射ではない．全射性があると便利な場合も希にあるため，そちらも導入しておこう．

$$(x, y, z) \in g \leftrightarrow 2z = (x+y)(x+y+1) + 2y$$

によって定める g は $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ の全単射である．$g(x, y)$ を今後は $\langle x, y \rangle$ と表記し，$1 \leq n \in \omega$ ごとに $\langle x_1, ..., x_n, x_{n+1} \rangle := \langle \langle x_1, ..., x_n \rangle, x_{n+1} \rangle$ と定める．この関数にはカントールの対関数という名前が付いており，以降これもペアリング関数という．

命題 3.21 (RCA$_0$)**.** 全域関数の合成が可能である．つまり，$k, n \in \omega$ とし，$k+1$ 個の関数 $g_1, ..., g_k \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ と $h \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ が与えられたとき，次を満たす関数 $f \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ が存在する．

$$f(x_1, ..., x_n) = h(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n))$$

[*19] $X \times Y$ は正確には，$\exists i, j \leq z(z = (i,j) \land i \in X \land j \in Y)$ という論理式に内包公理を適用して作る．

証明. まず以下のように二つの L_2 論理式 φ, ψ を用意する．

$$\varphi(\overline{x}, y) := \exists z \exists y_1, y_2, ..., y_k \leq z[(y_1, ..., y_k) = z \land g(\overline{x}) = y_1 \land \cdots \land g(\overline{x}) = y_k \land h(y_1, ..., y_k) = y]$$
$$\psi(\overline{x}, y) := \forall z \forall y_1, y_2, ..., y_k \leq z[(y_1, ..., y_k) = z \land g(\overline{x}) = y_1 \land \cdots \land g(\overline{x}) = y_k \to h(y_1, ..., y_k) = y]$$

φ は Σ^0_1 であり，ψ は Π^0_1 である．また g_i たちと h が関数であることから明らかにすべての $\overline{x}, y$ について $\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow \psi(\overline{x}, y)$ である．したがって再帰的内包公理により集合 $\{ (x_1, ..., x_n, y) \mid \varphi(x_1, ..., x_n, y) \}$ が作れる[*20]．これが求める f である． □

命題 3.21 の証明では実際に厳密な Σ^0_1 論理式を提示したが，公理を使う場面で毎度「Δ^0_0 の外側に一つ非有界存在数量化をおいた形」の論理式を書くのは手間である．また，わざわざ形を合わせずとも，別な Σ^0_1 論理式と同値であることを RCA_0 で証明できれば公理は適用できる．そのような論理式のクラス，つまり RCA_0 で許される変形によって別な Σ^0_1 論理式との同値性がいえる論理式のクラスを $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ と書けば，例えば RCA_0 で実際に有効な帰納法はこの $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ に属する論理式に関する帰納法公理である．再帰的内包公理に関しても同様である．$\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ を形式的に書き下しておこう．

定義 3.22. L_2 論理式 ϕ が $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ であるとは，以下を満たす Σ^0_1 論理式 φ が存在することと定める．

$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \phi \leftrightarrow \varphi$$

$\Pi^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ も同様に定義する．また L_2 論理式 ϕ が $\Delta^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ であるとは，それが $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ かつ $\Pi^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ であることと定める．

命題 3.23. $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ である L_2 論理式についての帰納法公理，および $\Delta^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ である L_2 論理式についてその内包公理が RCA_0 で証明可能．

次の命題によって帰納法と内包公理が使いやすくなるだろう．

命題 3.24. 次がすべて成り立つ．

1. $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ は有界数全称量化（$\forall n < t$）・非有界数存在量化（$\exists n$）・$\land$・$\lor$ に閉じる．
2. $\Pi^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ は有界数存在量化（$\exists n < t$）・非有界数全称量化（$\forall n$）・$\land$・$\lor$ に閉じる．
3. $\Delta^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ は有界数量化・$\neg$・$\land$・$\lor$ に閉じる．

証明. 1 を示す．Σ^0_1 帰納法により，任意の Δ^0_0 論理式 θ について次[*21]が正しい．以下で t は n を

[*20] より厳密には，$\varphi'(m)$ を次とする．

$$\exists z \exists \overline{y} \leq z \exists \overline{x}, y \leq n[(x_1, ..., x_n, y) = n \land (y_1, ..., y_k) = z \land g(\overline{x}) = y_1 \land \cdots \land g(\overline{x}) = y_k \land h(y_1, ..., y_k) = y]$$

$\psi'(m)$ も同様に定義し，$\forall m(\varphi'(m) \leftrightarrow \psi'(m))$ であることから集合 $\{ m \mid \varphi(m) \}$ を作る．ただ，ここまで厳密に議論すると本質的でない情報に紙面を取られ可読性が落ちるため以降は本文のようなラフな表記を用いる．

[*21] この形の公理は採集公理（Collection Axiom）と呼ばれよく研究されている．例えば [Kay91] の 7,10 章や [田中 19]p.123 を見よ．

含まない項である.

$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \forall n < t \exists m \theta(n, m) \to \exists k \forall n < t \exists m < k \theta(n, m).$$

逆は自動的に成り立つため両辺が同値であると分かる．この事実を標語的に述べれば，Σ^0_1 帰納法の下では Σ^0_1 論理式の外側についた全称有界量化は「中に押し込む」ことが可能である，となる[*22]．よって $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ は有界数全称量化に閉じる．

$\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ が非有界数存在量化 $(\exists n)$ に閉じることは RCA_0 で数のペアリングができることから分かる．つまり，$\theta(n, m)$ を Δ^0_0 論理式とすると $\exists n \exists m \theta(n, m)$ は $\exists k \exists n, m \le k(k = \langle n, m\rangle \wedge \theta(n, m))$ と RCA_0 上同値であることから従う．以上から 1 が正しい．2 は 1 の対偶を考えよ．3 は 1 と 2 の帰結である． □

RCA_0 で作ることのできる関数を増やすための強力な道具の一つが次の命題で与える有限列のコード化関数である．証明は簡単な自然数論[*23]を RCA_0 上で展開するだけの単調な作業なため参考文献を挙げるだけに留めて詳細は省いた．

補題 3.25 (RCA_0)**.** 以下をすべて満たすような 2 変数関数 $(x)_y$ が存在する．

(a) $\forall x, y((x)_y \le x)$
(b) $\forall x \exists y((y)_0 = x)$
(c) $\forall x, y, z \exists w((\forall i < z (w)_i = (y)_i) \wedge (w)_z = x)$

証明. [Kay91] Lemma 5.8 を見よ[*24]. □

$(x)_y$ による有限列のコード化ではこのままだと長さの情報が取り出せない．長さ情報付きの有限列のコード化のために一工夫しよう．具体的には，x の一番はじめの値，つまり $(x)_0$ を x がコードする有限列の長さとみなせばよい．さらにコード化を扱いやすくするために，同じ有限列のコードはただ一つという条件を持たせるために，与えられた長さ n の有限列 $\sigma \in \mathbb{N}^n$ のコードは，それを $(x)_y$ の関数を利用して表せる最小の x として定める．例えば長さ 3 の有限列 $\langle 0, 5, 6\rangle$ のコードは，$(x)_0 = 3 \wedge (x)_1 = 0 \wedge (x)_2 = 5 \wedge (x)_3 = 6$ を満たす最小の $x \in \mathbb{N}$ である．有限列全体の集合は RCA_0 で定義でき，それを Seq，あるいは $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ で表す．以上を形式的に議論しよう．

命題 3.26 (RCA_0)**.** 再帰的内包公理により作ることのできる次の集合 Seq は有限列（のコード）

[*22] 一般に，$k \in \omega$ に関する帰納法により Σ^0_k 帰納法の下では Σ^0_k 論理式の外側についた全称有界量化は「中に押し込む」ことが可能である．これのある種の拡張とみなせる次の主張も正しい．

$$\mathsf{RCA}_0 + \Sigma^1_{k+1}\text{帰納法公理} \vdash \forall n < t \exists X \theta(n, X) \leftrightarrow \exists X \forall n < t \exists m \theta(n, X_m)$$

ここで θ は Π^1_k 論理式であり，$\theta(n, X_m)$ は $\theta(n, X)$ 中の $t \in X$ を $\langle t, n\rangle \in X$ で書き換えた論理式．このことから Σ^1_{k+1} 帰納法の下で Σ^1_{k+1} 論理式は全称有界数量化に閉じることが分かる．

[*23] 中国剰余定理の証明など．

[*24] このテキストではいわゆるゲーデルの β 関数によって定義している．例によって [橋本 22a] の 3.3 節で詳しく証明を書いた．

全体の集合となっている．

$$x \in \mathrm{Seq} \leftrightarrow \forall w < x \neg((x)_0 = (w)_0 \wedge \forall i < (x)_0[(x)_{i+1} = (w)_{i+1}]).$$

すなわち，Seq の元を主に σ や τ で表すことにし，$(\sigma)_0$ を $|\sigma|$ で表し，$y < |\sigma|$ のとき $(\sigma)_{y+1}$ を $\sigma(y)$ で表すとき，Seq について次が正しい．

1. $\forall n \exists \sigma \in \mathrm{Seq}^1(\sigma(0) = n)$
2. $\forall k \forall \sigma \in \mathrm{Seq}^k \forall n \exists \tau \in \mathrm{Seq}^{k+1}(\forall i < k(\sigma(i) = \tau(i)) \wedge \tau(k) = n)$

ただしここで $\exists \sigma \in \mathrm{Seq}^k(...)$ は $\exists \sigma(\sigma \in \mathrm{Seq} \wedge |\sigma| = k \wedge ...)$ の略記であり，同様に $\forall \sigma \in \mathrm{Seq}^k(...)$ は $\forall \sigma(\sigma \in \mathrm{Seq} \wedge |\sigma| = k \to ...)$ の略記である．

証明. 1 を示す．n を任意にとって固定しておく．補題 3.25 の (b) から，$(y)_0 = 1$ を満たす y がとれる．次に (c) から $(w)_0 = (y)_0$かつ $(w)_1 = n$ すなわち

$$(w)_0 = 1 \wedge (w)_1 = n \tag{3.4}$$

を満たす w がとれる．この式 3.4 を満たす最小の w をとれば[*25]それが求める有限列である．2 の証明も同様である． □

有限列の合成をはじめ，有限列に関する様々な操作を行う関数は RCA_0 上で自然に定義できる．

定義 3.27 (RCA_0)**.** 各 $\sigma \in \mathrm{Seq}, n \in \mathbb{N}$ に対し，先の命題によって以下を満たす有限列 τ はちょうど一つ存在するため，それを $\sigma^\frown \langle n \rangle$，あるいは $\sigma^\frown n$ と表記する．

$$\forall i < |\sigma|(\sigma(i) = \tau(i)) \wedge \tau(|\sigma|) = n.$$

注意 3.28. 有限列のコード化は二元のペアリング関数をネストすることで得られると思うかもしれないが，その方法ではメタ有限長さの列しかコード化できない．この差は超準モデルを考えると納得できるだろう．実際，RCA_0 の超準モデルにおいて，超準長さの有限列のコード化はペアリングでは不可能である．したがってすべてのモデルで一様に通用する有限列のコード化，すなわち完全性定理によって言い換えるならば形式的体系上における有限列のコード化はペアリングをネストする方法では不十分である．わざわざ $(x)_y$ という関数を持ち出す理由はここにある．

注意 3.29. 以前定義した全単射によるペアリング $\langle x, y \rangle$ によるメタ有限列と記号が重複するが，体系内部の自然数 $m \in \mathbb{N}$ について，「m 個」の自然数 $n_1, ..., n_m$ からなる有限列，つまり $\forall i < m(\sigma(i) = n_i)$ を満たす $\sigma \in \mathrm{Seq}^m$ も $\langle n_1, ..., n_m \rangle$ と略記する．文脈からどちらの意味で $\langle , \rangle$ を使っているかの判別は容易だろう．

計算論で特に重要なのは自然数の部分集合の始切片と見なせる 0-1 有限列だろう．これについては次のように定義しておく．

[*25] Π^0_1 最小値原理（cf. 3.9）によってとれる．以降は断らない．

定義 3.30. 0-1 列に関して次のように略記（あるいは集合）を定める．

- $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}} :\leftrightarrow \sigma \in \mathrm{Seq} \land \forall i < |\sigma|(\sigma(i) = 0 \lor \sigma(i) = 1)$
- $\sigma \in 2^{l} :\leftrightarrow \sigma \in 2^{<\mathbb{N}} \land |\sigma| = l$
- $\sigma \in 2^{<l} :\leftrightarrow \exists m < l(\sigma \in 2^{m})$

さて，以上の議論から形式的体系内部において任意有限長さの有限列が扱えるようになった．この事実の試し切りとして指数関数の存在を示してみよう．

命題 3.31. RCA_0 で指数関数が存在する．つまり，以下が成り立つ．

$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \forall k \exists f[f(0) = 1 \land \forall n(f(n+1) = k \cdot f(n))]$$

証明. $k \in \mathbb{N}$ を任意にとって固定し，次の Δ^0_0 論理式を $\theta(n, \sigma)$ とする．

$$\sigma \in \mathrm{Seq}^{n+1} \land \sigma(0) = 1 \land \forall m < n[\sigma(m+1) = k \cdot \sigma(m)]$$

このとき，Σ^0_1 帰納法により容易に $\forall n \exists \sigma \theta(n, \sigma)$ が証明できる．実際，インダクションステップでは $\sigma^\frown \langle k \cdot \sigma(n) \rangle$ をとればよい．

さて，明らかに $\forall n \exists ! \sigma \theta(n, \sigma)$ でもあるので次で定義される集合 g は関数のグラフとなる．

$$(n, \sigma) \in g \leftrightarrow \theta(n, \sigma)$$

命題 3.21 から関数 $(x)_y$ と g を合成して $f(n) := (g(n))_{n+1} = (g(n))(n)$ と定めればこの f が条件を満たす． □

この証明を一般化することにより RCA_0 上で定義できる関数のクラスは原始再帰的定義に閉じることが証明できる．

3.3 計算論の形式化

ZFC 集合論では形式的体系で存在が証明できない対象について議論するために（パラメータを許した）論理式，すなわちクラスを用いる．例えば ZFC $\nvdash \exists v \forall x(x \in v \leftrightarrow x$ は順序数$)$ であるが，「x は順序数」を表わす論理式を $x \in \mathbf{ON}$ と略記とすることで「すべての順序数について...」という主張が $\forall x(x \in \mathbf{ON} \rightarrow ..)$ と書けるようになる．

計算可能部分関数はそのグラフを（集合パラメータを含まない）Σ^0_1 論理式によって定義できた．しかし RCA_0 は Δ^0_1 の内包公理しか持たず，Σ^0_1 論理式から部分関数のグラフを作ることが一般にはできない．そこで計算可能部分関数を RCA_0 で議論するために集合論と同様にクラス，特にクラス関数を利用する．

はじめにクラス関数について簡単に説明しよう．形式的体系上で $\forall x, y, y'(\varphi(x, y) \land \varphi(x, y') \rightarrow y = y')$ が正しかったとしても，RCA_0 で議論する場合など，論理式の複雑さよりも弱い内包公理しか使えない状況では $\{ (x, y) \mid \varphi(x, y) \}$ をグラフとする部分関数が集合として定義できないことがある．このような状況でもその部分関数を陽に扱いたい場合にそれをクラスとして扱う．つまり，

記号 f_φ を新たに用意して f_φ を含む論理式で議論を行う．そして必要に応じて f_φ を定義する論理式で論理式中に含まれる f_φ を書き直す．例えば $\forall x(f_\varphi(x)\downarrow= 1 \to ...)$ は $\forall x(\varphi(x,1) \to ...)$ といったようにである．この議論はより一般的に入力として集合を含む部分汎関数（partial functional）にも適用できる．例えば $(n \in X \land y = 1)$ は明らかに n, X に関する（型 $\mathbb{N} \times 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ の）部分汎関数を定義する．入力として集合を含むために RCA_0 では陽に汎関数を集合として扱えないが，これも記号 g を用意し，論理式中に陽に $g(n,X)\downarrow= 1$ と書くことを一旦許し，必要に応じて[*26] g を論理式で置き換えると約束することで部分汎関数を使った議論が可能になる．

定義 3.32 (部分クラス汎関数[*27])**.** 論理式 $\varphi(x_1,...,x_n,X_1,...,X_m,y)$（他にパラメータを含んでよい）について

$$\forall x_1,...,x_n,X_1,...,X_m\forall y,y'(\varphi(x_1,...,x_n,X_1,...,X_m,y)\land\varphi(x_1,...,x_n,X_1,...,X_m,y')\to y=y')$$

が正しいとき，必要に応じて対応する記号 f_φ を用意し言語を拡張する．そしてこの f_φ を φ から定まる部分クラス汎関数（partial class functional）とよぶ[*28]．f_φ に集合や数をパラメータとしていくつか代入することで部分適用された部分クラス（汎）関数が得られる．

- 部分クラス汎関数が集合変数を含まない場合，"汎"を省略して部分クラス関数という．
- 部分クラス（汎）関数が全域的である場合，"部分"を省略してクラス（汎）関数とよぶ．
- （部分）クラス関数 f に対して，それを定義する論理式からグラフを集合として作れる場合はそのグラフの集合も再び f で表し，"クラス"を省略して（部分）関数 f と言及する．
- Σ^0_1 論理式から定まる部分クラス汎関数を再帰的部分クラス汎関数とよぶ．
- 集合変数を含まず，パラメータに高々集合 A のみを含む Σ^0_1 論理式から定まる（部分）クラス関数を A（部分）再帰的クラス関数とよぶ．
- 集合変数を含まず，パラメータにも集合を含まない Σ^0_1 論理式から定まる（部分）クラス関数を（部分）再帰的クラス関数とよぶ．

部分クラス汎関数についても定義 3.18 と同様の記法を用いる．

注意 3.33. 計算可能という用語を避けて再帰的を採用した理由は超準モデルで致命的な問題が発生するからである．実際，RCA_0 の可算超準モデル，つまり $|M| \neq \omega$ である場合 M 上 Σ^0_1 論理式で定義される関数はおろか，$+_M$ ですら計算可能にはならない（cf. 例 2.11）．

例 3.34 (RCA_0)**.** $\varphi_{\mathrm{nonmax}}(n,X,y)$ を $n \in X \land \exists m > n(m \in X) \land y = 1$ とする．この $\varphi_{\mathrm{nonmax}}(n,X,y)$ は型 $\mathbb{N} \times 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ の再帰的部分クラス汎関数 f_{nonmax} を定める．ここで任意にとった $A \subseteq \mathbb{N}$ を f_{nonmax} に部分適用して得られる型 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の関数を f^A_{nonmax} と書く．これ

[*26] この必要が生じるのは追加した記号を含む論理式の階層が問題になる場合である．

[*27] この用語は一般的ではない．

[*28] この f_φ は型 $\mathbb{N}^n \times (2^{\mathbb{N}})^m \to \mathbb{N}$ を持つと解釈できる．本稿において汎関数という言葉は関数（ここでは $2^{\mathbb{N}}$ の元）を引数にもつ関数，という意味で用いる．

は次を満たす A 再帰的部分クラス関数である．

$$f^{A}_{\mathrm{nonmax}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in A \land \exists m > n(m \in A) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

部分クラス汎関数はこの f_{nonmax} のようにちょうど一つの集合入力しか持たない場合が多い．分かりやすさのために，そのような部分クラス汎関数を考える場合は今後はじめから集合入力用の変数を肩につけておくことにする．つまり，変数 X を用いて f^{X}_{nonmax} と表記することにする．このような再帰的部分クラス汎関数が中心的な役割を果たすため別の名前をつけておく．

定義 3.35. 集合パラメータを含まず，集合変数は高々 X のみである Σ^0_1 論理式によって定義される再帰的部分クラス汎関数を X 再帰的部分クラス関数とよぶ．

命題 3.36. X 再帰的部分クラス関数全体は合成，原始再帰，最小化による定義に閉じる．

証明. μ 再帰関数のグラフが Σ_1 であることの証明を書き下せ[*29]． □

$A \subseteq \mathbb{N}$ を固定したとき，A 再帰的クラス関数は次の命題からそのグラフを RCA_0 で作ることができる．そのため常にクラスを省略して A 再帰的関数と言及できる．

命題 3.37. 任意の $A \subseteq \mathbb{N}$ について，A 再帰的クラス関数は RCA_0 において常に集合として存在する．すなわち，$\varphi(\overline{x}, y, X)$ が表示したもののみを自由変数にもつ Σ^0_1 論理式であるとき次が正しい．

$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \forall A[\forall \overline{x} \exists ! y \varphi(\overline{x}, y, A) \to \exists Y \forall \overline{x}, y((\overline{x}, y) \in Y \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y, A))]$$

証明. A について $\forall \overline{x} \exists ! y \varphi(\overline{x}, y, A)$ であるとき $\forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y, A) \leftrightarrow \forall y'(\varphi(\overline{x}, y', A) \to y' = y))$ が成り立つ． □

同様に， 再帰的クラス関数は再帰的関数と言及する．このようにクラスであるか否かは理論の強さに依存する．

命題 3.26 では有限列の量化を導入した．これは一定の条件下では有界数量化と同様に論理式の階層を保つ．

補題 3.38 (RCA_0)**.** $\sigma \in \mathrm{Seq}^{<l}_{<m} :\leftrightarrow \exists l' < l(\sigma \in \mathrm{Seq}^{l'} \land \forall i < l'(\sigma(i) < m))$ と定める．このとき，次を満たす再帰的関数 f が存在する．

- $\forall m, l(\forall \sigma \in \mathrm{Seq}^{<l}_{<m}(\sigma \leq f(m, l))]$
- $\forall m, l \forall m' \geq m \forall l' \geq l(f(m', l') \geq f(m, l))$

つまり，この f の条件を自然言語で述べると次のようになる．：有限列の長さの最大 l と取り得る値の最大値 m を先に固定したとき，$f(m, l)$ 以下にそのような有限列がすべて出てくる単調増加関数．

[*29] 例えば [Kay91] Theorem3.3 に詳細がある．例によって [橋本 22a] にもある．

証明. f を定義する Σ_1 論理式の構成は有限列のコード化関数（本稿では $(x)_y$）の定義に依存する．本稿ではそれを具体的に与えていないため省略する[*30]. □

系 3.39. $\varphi(s,m,l)$ が $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ のとき，$\forall\sigma\in\mathrm{Seq}^{\le l}_{<m}\varphi(\sigma,m,l)$ も $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ である．

証明. 先の補題の関数 f を定義する Σ_1 論理式を $\varphi_f(m,l,y)$ とかく．このとき

$$\forall m,l(\forall\sigma\in\mathrm{Seq}^{\le l}_{<m}\varphi(\sigma,m,l)\leftrightarrow\exists y(\varphi_f(m,l,y)\land\forall\sigma\le y(\sigma\in\mathrm{Seq}\to\varphi(\sigma,m,l))))$$

となることから従う[*31]. □

重要な帰結として，$\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ は $\forall\sigma\in 2^l$ の量化に閉じることが挙げられる[*32].

系 3.40. $\varphi(s,m,l)$ が $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ のとき，$\forall\sigma\in 2^l\varphi(\sigma,m,l)$ や $\forall\sigma\in 2^{<l}\varphi(\sigma,m,l)$ も $\Sigma^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ である．

通常の計算可能性理論では何かしらの計算モデルを固定し，その計算モデルの万能マシンを用いることで正規形定理が得られる．これと同様に，RCA_0 上でも Σ^0_1 論理式に関する万能論理式（universal formula）を用いることで正規形定理が得られる．具体的構成は単調だが膨大な作業を要するためここでは省略する．興味があれば [橋本 22a] を見よ．そこでは先に S^m_n 定理を示してから正規形定理を証明した．

定理 3.41. 各 $k\in\omega$ について次を満たす X 再帰的部分クラス関数 $\Phi^X_z(x_1,..,x_k)$ が存在する[*33].

相対化された正規形定理　任意に $A\subseteq\mathbb{N}$ を取って固定する．このとき，任意の A 再帰的部分クラス関数 $f\colon\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ に対し，ある $e\in\mathbb{N}$ が存在して次が成り立つ．

$$\forall x_1,...,x_k(f(x_1,...,x_k)\simeq\Phi^A_e(x_1,...,x_k))$$

その一様版　任意の X 再帰的部分クラス関数 g^X に対し，ある $e\in\mathbb{N}$ が存在して次が成り立つ．

$$\forall A\forall x_1,...,x_k(g^A(x_1,...,x_k)\simeq\Phi^A_e(x_1,...,x_k))$$

注意 3.42. 二つ目の一様版ではすべての X に対して g^X が部分クラス関数であることを要請する[*34]．”固定された”A についてのみ部分クラス関数であればよい一つ目とはこの点で異なる．

この定理を言い換えれば，一つ目は各 $A\subseteq\mathbb{N}$ を固定するごとに $\{\Phi^A_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ が A 再帰的部分クラス関数の枚挙であることを主張している．二つ目は，$\{\Phi^X_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ が X 再帰的部分クラス関数の枚挙（あるいは型 $\mathbb{N}^k\times 2^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$ の再帰的部分クラス汎関数の枚挙）であることを主張している．以降この二つの形の相対化された正規形定理を区別せずにどちらも（相対化された）正規形定理という．

[*30] [Kay91] Exercise 9.18(a) に問題としてあげられている．これの解答は [橋本 22b] にある．

[*31] 厳密には $\sigma\in\mathrm{Seq}$ で使われている $(x)_y$ も Σ_1 で定義されることも用いる．

[*32] この事実を示すだけなら，0-1 有限列のコード化関数として二進展開を用いればよい．その場合，補題 3.38 の f を指数関数で代用できる．

[*33] これはちょうど $X,z,x_1,...,x_k$ を自由変数にもち，何かしらのよい条件を満たす Σ^0_1”論理式”が存在することを主張している定理である．

[*34] 例 3.34 の f^X_{nonmax} が具体例である．

定理 3.43 (相対化された S^m_n 定理 in RCA_0)**.** n, m を 1 以上のメタの自然数とする．このとき，次を満たす再帰的関数 S^m_n が存在する．

$$\forall A \forall x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_m (\Phi^A_{S^m_n(e,z_1,...,z_m)}(x_1, ..., x_n) \simeq \Phi^A_e(x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_m))$$

例 3.48 が典型的な使用方法である．

系 3.44 (相対化された再帰定理（不動点定理） in RCA_0)**.** $I\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を再帰的関数とし，$A \subseteq \mathbb{N}$ とする．このとき，次を満たす $c \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\forall x_1, ..., x_n (\Phi^A_{I(c)}(x_1, ..., x_n) \simeq \Phi^A_c(x_1, ..., x_n))$$

また Φ^X_z の有限近似も通常の計算論と同様に計算ステップ数の制限を考えることで自然に定まり，次の命題の条件を満たす．

命題 3.45 (RCA_0)**.** 各 $k \in \omega$ について以下を満たす（$k+3$ 変数入力の）再帰的部分関数 $\Phi^\tau_{e,t}(x_1, ..., x_k)$ が存在する．

$$\begin{aligned}\forall A \forall e, x_1, ..., x_k, y (\Phi^A_e(x_1, ..., x_k) \downarrow= y \leftrightarrow \\ \exists s \geq y \exists \sigma \in 2^{<s} (\sigma \subseteq A \wedge \forall \tau \supseteq \sigma \forall t \geq s (\Phi^\tau_{e,t}(x_1, ..., x_k) \downarrow= y)))\end{aligned}$$

ただしここで $\sigma \subseteq A$ は $\forall i < |\sigma| ((\sigma(i) = 1 \to i \in A) \wedge (\sigma(i) = 0 \to i \notin A))$ の略記である．

定義 3.46. $\Phi^X_e \in 2^{\mathbb{N}}$ を次の論理式の略記とする．

$$\forall n (\Phi^X_e(n) = 0 \vee \Phi^X_e(n) = 1)$$

定義 3.47 (RCA_0)**.** $A, B \subseteq \mathbb{N}$ について B が A に Turing 還元可能であることを，次を満たす $e \in \mathbb{N}$ が存在することと定め，通常の計算論と同様に $B \leq_{\mathrm{T}} A$ と表記する．

$$\Phi^A_e \in 2^{\mathbb{N}} \wedge \forall n (n \in B \leftrightarrow \Phi^A_e(n) = 1)$$

上記を満たす e を B の A-*recursive* インデックスとよぶ．また上の式を満たすとき $B \leq_{\mathrm{T}} A$ via e，あるいは $B = \Phi^A_e$ と表記する．

例 3.48. $X_n \leq_{\mathrm{T}} X$ via $\mathrm{sec}(n)$，すなわち $X_n = \Phi^X_{\mathsf{sec}(n)}$ を満たす再帰的関数 sec が存在する．ただしここで $X_n = \{ m \mid (m, n) \in X \}$ である．

証明. 論理式 $((m, n) \in X \to y = 1) \wedge ((m, n) \notin X \to y = 0)$ から次の X 再帰的クラス関数 g^X が定まる．

$$g^X(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{if } (m, n) \in X \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

正規形定理から次を満たす e がとれる．

$$\forall A, n, m (\Phi^A_e(m, n) \simeq g^A(m, n))$$

S^m_n 定理から

$$\forall A, n, m(\Phi^A_{S^1_1(e,n)}(m) \simeq \Phi^A_e(m, n) \simeq g^A(m, n))$$

であるため $\mathsf{sec}(n) := S^1_1(e, n)$ が条件を満たす. □

例 3.49. $Z \leq_{\mathrm{T}} Y$ via $e \wedge Y \leq_{\mathrm{T}} X$ via $d \to Z \leq_{\mathrm{T}} X$ via $\mathsf{trans}(e, d)$ を満たす再帰的関数 trans が存在する.

証明. 直感的にはプログラム e 中に現れるオラクルへの問い合わせ「$t \in$ オラクル?」を「$\Phi^{オラクル}_e(t) = 1?$ or $\Phi^{オラクル}_d(t) = 0?$」で書き換える関数が $\mathsf{trans}(e, d)$ である. 形式的に議論しよう. 次の Σ^0_1 論理式を $\varphi(e, n, y, Y)$ とする.

$$\exists s[\exists \sigma \in 2^{<s} \wedge \sigma \subseteq Y \wedge \Phi^\sigma_e(n) = y]$$

$\varphi(e, n, y, Y)$ の $\sigma \subseteq Y$ を次の論理式で置き換えたものを $\varphi'(e, d, n, y, X)$ と書く.

$$\forall i < |\sigma|((\sigma(i) = 1 \to \Phi^X_d(i) = 1) \wedge (\sigma(i) = 0 \to \Phi^X_d(i) = 0))$$

命題 3.24 から $\varphi'(e, d, n, y, X)$ は Σ^0_1 なので, これは e, d, n を入力とする X 再帰的部分クラス関数を定める. よって正規形定理と S^m_n 定理から次を満たす e_t がとれる.

$$\forall X, e, d, n(\Phi^X_{S^2_1(e_t,e,d)}(n) = y \leftrightarrow \varphi'(e, d, n, y, X))$$

このとき $\mathsf{trans}(e, d) := S^2_1(e_t, e, d)$ が条件をみたす. □

通常の計算論において B が A 上 r.e. であることと A 上 Σ_1 であることが同値なのであった. そこで本稿では Σ_1 によって r.e. を定義する.

定義 3.50 (RCA_0)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$ とする. $B \subseteq \mathbb{N}$ が A 上 r.e. であるとは, 高々表示した変数のみを自由変数にもつ Σ^0_1 論理式 $\varphi(z, n, X)$ があって次を満たすことと定める.

$$\exists e \forall n(n \in B \leftrightarrow \varphi(e, n, A))$$

命題 3.51 (Σ^0_1 論理式に関する普遍性)**.** $\varphi(x, n, X)$ は高々表示した変数のみを自由変数にもつ Σ^0_1 論理式とする. このとき次が成り立つ.

$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \forall e \exists e' \forall A \forall n(\varphi(e, n, A) \leftrightarrow \Phi^A_{e'}(n)\downarrow)$$

証明. $e \in \mathbb{N}$ を任意にとって固定する. このとき $\varphi(e, n, X) \wedge y = 1$ は次の X 再帰的部分クラス関数 g^X を定める

$$g^X(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varphi(e, n, X) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

よって正規形定理から条件を満たす e' がとれる. □

系 3.52 (RCA_0)**.** $A, B \subseteq \mathbb{N}$ について以下同値.

- B が A 上 r.e. である．
- $\forall n(n \in B \leftrightarrow \Phi_e^A(n)\downarrow)$ を満たす $e \in \mathbb{N}$ が存在する．

下の条件における e を B の r.e. インデックスとよび，この B を W_e^A とも表記する．

系 3.53. RCA_0 は有限公理化可能.

証明. Φ_z^X がもつ性質を証明するために使われた公理すべての集合を S とする．S は RCA_0 の有限部分集合である．この S に以下の文を付け加えたものを S' とする．

$$\forall X, Y \exists Z \forall n(n \in Z \leftrightarrow \exists k \leq n((n = 2k \wedge k \in X) \vee (n = 2k+1 \wedge k \in Y)))$$

$$\forall A \forall e[\Phi_e^A(0)\downarrow \wedge \forall n(\Phi_e^A(n)\downarrow \rightarrow \Phi_e^A(n+1)\downarrow) \rightarrow \forall n \Phi_e^A(n)\downarrow)$$

$$\forall A \forall e, e'[\forall n(\Phi_e^A(n)\downarrow \leftrightarrow \Phi_{e'}^A(n)\uparrow) \rightarrow \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \Phi_e^A(n)\downarrow)]$$

このとき Σ_1^0 論理式に関する Φ_z^X の普遍性から $S' \vdash \mathsf{RCA}_0$ である． □

定義 3.54 (RCA_0). $A \subseteq \mathbb{N}$ とする．もし $\{(m, e) \mid \Phi_e^A(m)\downarrow\}$ が集合として存在するならそれを $\mathrm{TJ}(A)$ と書き，A の Turing ジャンプとよぶ.

インフォーマルには $\mathrm{TJ}(A) = \bigcup_{e \in \mathbb{N}} W_e^A \times \{e\}$ である．

命題 3.55 (RCA_0). 以下を満たす再帰的関数 $\mathsf{jump}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する．

$$\forall X, Y, e(X \leq_{\mathrm{T}} Y \text{ via } e \ \rightarrow \mathrm{TJ}(X) \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(Y) \text{ via } \mathsf{jump}(e))$$

証明. trans や sec と同様の方法で証明できる．結論だけ述べると，

$$\Phi_{e_j}^X(e, (m, d)) = \begin{cases} 1 & \text{if } (m, \mathsf{trans}(d, e)) \in X \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる e_j をとり，$\mathsf{jump}(e) := S_1^1(e_j, e)$ とすればよい． □

定義 3.56 (内包公理).

$$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)) \ \text{ where } \varphi \in \Gamma$$

を Γ 内包公理といい，Γ-CA と書く．とくに Π_0^1-CA $\equiv$ Σ_0^1-CA $\equiv$ Δ_0^1-CA を算術的内包公理（Arithmetical Comprehension Axiom）という．$\mathsf{ACA}_0 := \mathsf{RCA}_0 + \Delta_0^1$-CA とする．

命題 3.57. RCA_0 上で次が同値.

1. $\forall X \exists \mathrm{TJ}(X)$
2. 算術的内包公理

証明. $(2 \to 1)$ は 自明．逆はポストの定理の証明を形式化すればよい．つまり，X の $n+1 \in \omega$ 回 Turing ジャンプを $\mathrm{TJ}(n+1, X) := \mathrm{TJ}(\mathrm{TJ}(n, X))$, $\mathrm{TJ}(0, X) = X$ で定義したときに，X のみ

をパラメータにもつ Σ^0_{n+1} 論理式で定義される集合は $\mathrm{TJ}(n,X)$ 上 r.e. であることの証明を書き下せばよい． □

命題 3.13 と同様の証明により次が成り立つ．

命題 3.58. 各 $X \subseteq \omega$ について，$\mathrm{ARITH}(X) := \{\, Y \subseteq \omega \mid Y \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(n,X) \text{ for some } n \in \omega \,\}$ が X を含む ACA_0 の最小の ω モデルである．

3.4 集合の超限再帰的定義と Turing ジャンプの超限回反復

定義 3.59 (算術的 ω 再帰)**.** ここでは小節 2.2 で行ったような集合の再帰的構成を可能にする公理を扱う．

以下を θ の ω 再帰公理とよぶ[*35]．

$$\forall X \exists \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}[Y_0 = X \land \forall n(Y_{n+1} = \{\, m \mid \theta(m, Y_n) \,\})]$$

ここで $\theta(m,Z)$ は m, Z のみを自由変数にもつ論理式である．

$\theta(m,Z)$ を $m \in \mathrm{TJ}(Z)$ としたものが特に重要なインスタンスである．この公理をそのまま書けば

$$\forall X \exists \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}[Y_0 = X \land \forall n(Y_{n+1} = \{\, m \mid m \in \mathrm{TJ}(Y_n) \,\})]$$

となる．要するにこの $Y_0, Y_1, ..., Y_n, ...$ は

$$\begin{cases} Y_0 & = X \\ Y_{n+1} & = \mathrm{TJ}(Y_n) \end{cases}$$

という漸化式を満たしている集合の列である．よってこの $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の ω 回 Turing ジャンプと定めて $\mathrm{TJ}(\omega, X)$ と表記する．

定義 3.60. $\mathsf{ACA}_0^+ := \mathsf{ACA}_0 + \forall X \exists \mathrm{TJ}(\omega, X)$

定義 3.61 (RCA_0)**.** 命題 3.55 で定義した jump についてその繰り返しを次のように定義する．$1 \leq k \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{cases} \mathsf{jump}(1,e) & = \mathsf{jump}(e) \\ \mathsf{jump}(k+1,e) & = \mathsf{jump}(\mathsf{jump}(k,e)) \end{cases}$$

と $\mathsf{jump}(*,*)\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める．

注 3.62. $\mathrm{TJ}(n,X) \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(\omega, X)$ via $\mathsf{sec}(n)$

補題 3.63. ACA_0 上で以下同値．

[*35] この用語は一般的ではない．

1. $\forall X \exists \mathrm{TJ}(\omega, X)$.
2. 全ての算術的論理式に関する ω 再帰公理.

証明. ACA_0^+ において各算術論理式に関する ω 再帰公理が正しいことを示せばよい．$\theta(m, Z)$ を $\Pi^0_k (k \in \omega)$ として固定する．このとき，ある $e_\theta \in \mathbb{N}$ で

$$\forall m, Z(\{\, m \mid \theta(m, Z) \,\} \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(k, Z) \text{ via } e_\theta) \tag{3.5}$$

を満たすものがとれる．さて，定義の理由は後に回して，証明に必要なものを先に全て定義しよう．まず $\forall X(X \leq X \text{ via } eid)$ なる e_{id} をとり，

$$\begin{cases} g(0) & = e_{\mathsf{id}} \\ g(n+1) & = \mathsf{trans}(\mathsf{sec}(e_\theta), \mathsf{jump}(k, g(n))). \end{cases}$$

で $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める．任意に X をとったとき，θ に関する ω 再帰の解であることを期待する $Y = \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$Y_n = \{\, m \mid \Phi^{\mathrm{TJ}(\omega, X)}_{\mathsf{trans}(g(n), \mathsf{sec}(kn))}(m) = 1 \,\}$$

によって定義する[*36]（したがって $Y \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(\omega, X)$）.

構成の妥当性を検証するために，g が $Y_n \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(kn, X)$ via $g(n)$ を満たすことを帰納法で示す．実際，証明過程で $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の構成の妥当性を確認できていることに注意せよ．

$g(0) = e_{\mathsf{id}}$ が条件を満たしていることは自明．$g(n+1)$ の構成を紐解いていく．まず式 3.5 より

$$\{\, m \mid \theta(m, Y_n) \,\} \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(k, Y_n) \text{ via } \mathsf{sec}(e_\theta).$$

次に，$g(n)$ が条件を満たすとすると $\mathrm{TJ}(k, Y_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(k(n+1), X)$ via $\mathsf{jump}(k, g(n))$ なので

$$\{\, m \mid \theta(m, Y_n) \,\} \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(k(n+1), X) \text{ via } \mathsf{trans}(\mathsf{sec}(e_\theta), \mathsf{jump}(k, g(n))) = g(n+1)$$

を得る．$\mathrm{TJ}(k(n+1), X) \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(\omega, X)$ via $\mathsf{sec}(k(n+1))$ より

$$\{\, m \mid \theta(m, Y_n) \,\} \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(\omega, X) \text{ via } \mathsf{trans}(g(n+1), \mathsf{sec}(k(n+1)))$$

を満たすので $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の定義から $\{\, m \mid \theta(m, Y_n) \,\} = Y_{n+1}$ だと分かる．よって

$$Y_{n+1} \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(k(n+1), X) \text{ via } g(n+1)$$

である． □

ACA_0^+ の力は $\mathrm{TJ}(\omega, X)$ を作る箇所以外で使用していないため，再帰の回数をメタ有限に制限したものは ACA_0 でも証明できる．この事実は ACA_0 で弱モデルを構成するために用いる．

[*36] i.e., $Y_n \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(\omega, X)$ via $\mathsf{trans}(g(n), \mathsf{sec}(kn))$ for all $n \in \mathbb{N}$

定義 3.64 (算術的メタ有限再帰)**.** $l \in \omega$ とする．以下を θ の l 再帰公理とよぶ．

$$\forall X \exists \{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}[Y_0 = X \land \forall n < l(Y_{n+1} = \{\, m \mid \theta(m, Y_n)\,\}) \land \forall n > l(Y_n = \varnothing)]$$

ここで $\theta(m, Z)$ は m, Z のみを自由変数にもつ論理式．l 再帰公理全体を θ のメタ有限再帰と呼ぶことにする．

系 3.65. 全ての算術的論理式に関するメタ有限再帰が ACA_0 で証明可能．

証明. $\theta \in \Pi^0_k$ の l 再帰公理は補題 3.63 の証明中の $\mathrm{TJ}(\omega, X)$ を $\mathrm{TJ}(kl, X)$ で書き換えればおおよそ同様の証明が通る． $\square$

算術的論理式に関する ω 再帰公理の ω を一般の整列順序（数）へ拡張することで算術的超限再帰公理，すなわち ATR（Arithmetical Transfinite Recursion）が得られる．まずは整列順序を定式化しよう．

定義 3.66 (RCA_0)**.** $X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が反射的（reflective）であるとは，$\forall i, j((i, j) \in X \leftrightarrow (i, i) \in X \land (j, j) \in X)$ を満たすことをいう．X が反射的なとき，

$$\mathrm{field}(X) := \{\, i \mid (i, i) \in X\,\}$$

として定める．ここで

$$i \leq_X j :\leftrightarrow (i, j) \in X, \quad i <_X j :\leftrightarrow i \leq_X j \land i \neq j$$

と定めることで X がコードする反射的順序集合 $(\mathrm{field}(X), \leq_X)$ を定める．この順序集合をよくある記号の乱用だが X と表記することもある．

X が線形順序集合であるとは，X が反射的であり，さらに次を条件を満たすことをいう．

推移律 $\forall i, j, k(i \leq_X j \land j \leq_X k \to i \leq_X k)$
反対称律 $\forall i, j(i \leq_X j \land j \leq_X i \to i = j)$
比較可能律 $\forall i, j(i \leq_X j \lor j \leq_X i)$

このとき $\mathrm{LO}(X)$ と表記する．X が整礎順序集合であるとは，反射的であってさらに次を満たすことをいう．このときに $\mathrm{WF}(X)$ と表記する．

$$\neg\exists f[f\colon \mathbb{N} \to \mathrm{field}(X) \land \forall n(f(n+1) <_X f(n))]$$

X が整列順序集合でることを $\mathrm{LO}(X) \land \mathrm{WF}(X)$ で定め，この Π^1_1 論理式を $\mathrm{WO}(X)$ と表記する．

注意 3.67. 整礎の表現として $\forall Y \subseteq \mathrm{field}(X)(Y \neq \varnothing \to \exists x \in Y \forall y <_X x(y \notin Y))$ もある．無限 c.e. 集合が常に計算可能な無限部分集合を含むという事実を思い出せば，この表現が上記の $\mathrm{WF}(X)$ と RCA_0 で同値であると分かる[*37]．

[*37] proof skech: f を $<_X$ の無限下降列だとする．このとき $\begin{cases} I(0) &= 0, \\ I(n+1) &= \mu i[I(n) < i \land f(I(n)) < f(i)] \end{cases}$ によっ

補題 3.68 (算術的超限帰納法（[Sim09] Lemma V.2.1）). $\varphi(i)$ を算術論理式とするとき，その超限帰納法が ACA_0 証明できる．つまり次が正しい．

$$\mathsf{ACA}_0 \vdash \forall X(\mathrm{WO}(X) \to \forall j(\forall i <_X j\varphi(i) \to \varphi(j)) \to \forall j \in \mathrm{field}(X)\varphi(j))$$

証明. 容易． □

定義 3.69 (超限再帰). $\theta(n, Y)$ を L_2 論理式とする（他に自由変数をもってもよい）.「(線形順序) X に沿った θ の超限再帰から得られる集合が Y である」を意味する論理式 $\mathrm{H}_\theta(X, Y)$ の形式的定義を与える．まず $Y^j = \{\,(m, i) \mid i <_X j \wedge (m, i) \in Y\,\}$ とする[*38]．次に $\theta(n, Y)$ における $t \in Y$ (t は数項）の箇所全てをこの $t \in Y^j$ でに置き換えた論理式を $\theta'(n, Y, X, j)$ と書く．以上のもとで次のように定義する．

$$\mathrm{H}_\theta(X, Y) :\leftrightarrow \mathrm{LO}(X) \wedge \forall n, j((n, j) \in Y \leftrightarrow j \in \mathrm{field}(X) \wedge \theta'(n, Y, X, j))$$
$$\mathrm{H}_\theta(k, X, Y) :\leftrightarrow \mathrm{LO}(X) \wedge \forall n, j((n, j) \in Y \leftrightarrow j \in \mathrm{field}(X) \wedge j <_X k \wedge \theta'(n, Y, X, j))$$

$\mathrm{H}_\theta(X, Y)$ を満たす Y について補足しよう．まず $\forall n((n, j) \in Y \leftrightarrow \theta(n, Y^j))$ という式から $Y_j = \{\,n \mid \theta(n, Y^j)\,\}$ が正しい[*39]．つまり，$\theta(*, Z)$ を $Z \mapsto \{\,n \mid \theta(n, Z)\,\}$ なる関数 F_θ だと思うと，直感的には $Y_i = F_\theta(Y^i)$ であり，$Y^j = \bigcup_{i <_X j}(F(Y^i) \times \{i\})$ である．例 3.72 に具体例がある．

定義 3.70. 下記の公理（図式）を Γ 超限再帰公理とよび，Γ-TR と書く．

$$\forall X(\mathrm{WO}(X) \to \exists Y \mathrm{H}_\theta(X, Y)) \quad \text{where } \theta \in \Gamma$$

特に $\Gamma = \Pi^1_0$，つまり算術論理式とした場合の Π^1_0-TR を算術的超限再帰とよび，ATR と表記する．これらに RCA_0 を付け加えた理論を Γ-TR_0 と書く．

補題 3.71 (ACA_0[Sim09] Lemma V.2.3). $\mathrm{WO}(X)$ のとき，$\mathrm{H}_{\theta(X,Y)}$ なる Y は一意的である．, $\mathrm{H}_{\theta(k,X,Y)}$ についても同様．

証明. 算術的超限帰納法から従う． □

命題 3.72. $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{ACA}_0^+$

証明. 普通の自然数の大小関係を $<_X$ として，$\theta(n, Y)$ として $n \in X \oplus \mathrm{TJ}(Y)$ を考えることで X の ω 回 Turing jump（と計算論的に同値な集合）が得られる．こちらで得られる集合 Y は実際には $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \oplus \mathrm{TJ}(Y^n)) \times \{n\}$（注：$Y^0 = \varnothing$）であり，すでに定義した $\mathrm{TJ}(\omega, X)$ と見た目は異なる．しかし $Y \equiv_\mathrm{T} \mathrm{TJ}(\omega, X)$ すなわち $Y \leq_\mathrm{T} \mathrm{TJ}(\omega, X)$ かつ $\mathrm{TJ}(\omega, X) \leq_\mathrm{T} Y$ が補題 3.63 のような議論で証明できる． □

て I を定めると，$f \circ I$ は単調増大関数であるのでその値域 R が再帰的内包公理によって定義できる．この R は $<_X$ 極小元を持たない．

[*38] 直感的には Y の高さ j 未満近似．

[*39] $Y_j = \{\,n \mid (n, j) \in Y\,\}$ と定義していた．

順序埋め込みなどの用語をここでは形式的に定義していないが，ATR_0 に関する次の逆数学的結果により特に ATR_0 は Π^1_2 文で有限公理化できることが従う．

定理 3.73 ([Sim09] Theorem V.6.8)**.** RCA_0 上で次が同値.

1. ATR
2. 任意の二つの整列順序集合 X, Y が比較できる．つまり，$|X| < |Y|$, $|X| = |Y|$, $|X| > |Y|$ のいずれかの証拠となる順序埋め込み（あるいは同型）が存在する．

ACA_0^+ と同様に ATR_0 も Turing ジャンプの繰り返しによって特徴づけることができる．詳しくは [Sim09] VIII.3 節を見よ．そこでは主に高位計算可能性理論（Higher recursion theory）を形式化した結果が様々述べられている．高位計算可能性理論については [Sac90] を参照せよ．また ATR_0 では記述集合論に関する逆数学的結果がある．この内容については [Sim09] V 章を参照せよ．本稿では命題 3.72 の逆が成り立たないことなどを最後の章で ω モデル反映を紹介しつつ詳しく述べる．

4 ω モデル反映

4.1 数理論理学の形式化

RCA_0 における数理論理学の形式化について述べる．RCA_0 内部で形式化する都合上，言語は可算なもののみを扱う．さて，一階述語論理の可算言語とは関数記号と関係記号と定数記号の可算集合である．より形式的に，かつ一般的に述べよう．i 番目の m 変数関数記号を f_i^m と書き，j 番目の n 変数関数記号を R_j^n と書き，k 番目の定数記号を c_k とかく．このとき次の集合が可算言語である．

$$\{\, \langle \mathsf{f}_i^m \rangle_{i\in\omega} \mid m \geq 1 \,\} \cup \{\, \langle \mathsf{R}_j^n \rangle_{j\in\omega} \mid n \leq 1 \,\} \cup \langle \mathsf{c}_k \rangle_{k\in\omega}$$

まずは可算言語を形式化する．

定義 4.1 (可算言語)**.** 関数記号，関係記号，定数記号を区別するために異なる自然数を三つ用意する．その三つの自然数にそれぞれ $\mathsf{func}, \mathsf{Rel}, \mathsf{const}$ というラベルを貼る．このとき，$\langle \mathsf{func}, \langle m, i \rangle \rangle, \langle \mathsf{Rel}, \langle n, j \rangle \rangle, \langle \mathsf{const}, k \rangle$ という自然数の対からなる集合を言語という．ただしここで m, n は 1 以上の自然数.

言語 L のうち，m 変数関数記号のからなる部分集合を $\mathrm{L}(\mathsf{func}, m)$ で表す．関係記号についても同様．L の定数記号の集合は $\mathrm{L}(\mathsf{const})$ で表す．

例 4.2. RCA_0 において，等号を含む一階算術の言語 $\{+, \cdot, =, <, 0, 1\}$ は例えば次の自然数の有限集合として表せる．

$$\{\langle \mathsf{func}, \langle 2, 0 \rangle \rangle, \langle \mathsf{func}, \langle 2, 99 \rangle \rangle, \langle \mathsf{Rel}, \langle 2, 0 \rangle \rangle, \langle \mathsf{Rel}, \langle 2, 1 \rangle \rangle, \langle \mathsf{const}, 0 \rangle, \langle \mathsf{const}, 87 \rangle\}$$

またこのとき $\mathrm{L}(\mathsf{func}, 2) = \{\langle \mathsf{func}, \langle 2, 0 \rangle \rangle, \langle \mathsf{func}, \langle 2, 99 \rangle \rangle\}$ であり，$\mathrm{L}(\mathsf{Rel}, 3) = \varnothing$ である．

項や論理式を形式化するために，変数記号と論理記号へのナンバリングを定めておく．

定義 4.3 (論理記号へのナンバリング)**.** func, Rel, const 以外の自然数を一つ用意し，それに var とラベルを貼る．そして $\langle \mathsf{var}, n\rangle$ という自然数の対を（n 番目の）変数と定める，また，これまでに使われていない 7 個の異なる自然数を用意し，それらに $\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner\wedge\urcorner, \ulcorner\vee\urcorner, \ulcorner\forall\urcorner, \ulcorner\exists\urcorner$ とラベルを貼る．

定義 4.4. 次のように略記を定める．

正式な定義	略記
$\langle \mathsf{func}, \langle m, i\rangle\rangle$	$\ulcorner \mathsf{f}_i^m \urcorner$
$\langle \mathsf{const}, k\rangle$	$\ulcorner \mathsf{c}_k \urcorner$
$\langle \mathsf{Rel}, \langle n, j\rangle\rangle$	$\ulcorner \mathsf{R}_j^n \urcorner$
$\langle \mathsf{var}, n\rangle$	$\ulcorner \mathsf{v}_n \urcorner$

命題 4.5 (RCA_0)**.** 任意の言語 $\mathrm{L} \subseteq \mathbb{N}$ に対し，以下を満たす集合 $\mathrm{Term_L}$ が存在する．

- $\forall n(\ulcorner \mathsf{v}_n \urcorner \in \mathrm{Term_L})$
- $\forall n(\ulcorner \mathsf{c}_n \urcorner \in \mathrm{Term_L} \leftrightarrow \ulcorner \mathsf{c}_n \urcorner \in \mathrm{L})$
- $\forall m, i \forall \sigma \in \mathbb{N}^m(\langle \ulcorner \mathsf{f}_i^m \urcorner, \sigma\rangle \in \mathrm{Term_L} \leftrightarrow \ulcorner \mathsf{f}_i^m \urcorner \in \mathrm{L} \wedge \forall l < m(\sigma(l) \in \mathrm{Term_L}))$

証明. 正規形定理と S^m_n 定理により次を満たす再帰的関数 I がとれる．

$$\Phi^{\mathrm{L}}_{I(e)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = \ulcorner \mathsf{v}_n \urcorner \vee x = \ulcorner \mathsf{c}_k \urcorner \in \mathrm{L} \\ \prod_{i<m} \Phi^{\mathrm{L}}_e(\sigma(i)) & \text{if } x = \langle \ulcorner \mathsf{f}_i^m \urcorner, \sigma\rangle \wedge \ulcorner \mathsf{f}_i^m \urcorner \in \mathrm{L} \wedge |\sigma| = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

再帰定理により I の不動点をとり c とする．Φ^{L}_c の全域性が Σ^0_1 帰納法によって従うのでグラフが Δ^0_1 となり，再帰的内包公理によって $\{\, n \mid \Phi^{\mathrm{L}}_c(n) = 1 \,\}$ が作れる．この集合が条件を満たす． □

同様にして L 論理式全の集合 $\mathrm{Form_L}$ も作ることができる．また $\mathrm{Form_L}$ に含まれる文全体の集合は Δ^0_1 内包公理によって作ることができ，それを $\mathrm{Sent_L}$ と書く[*40]．

表記が煩雑になるため，今後は $\ulcorner, \urcorner$ を省略する．

言語 $\mathrm{L} \subseteq \mathbb{N}$ と集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ に対し，A の元に対応する定数 $\{\, \mathsf{c}_a \mid a \in A \,\}$ を付け加えた言語を $\mathrm{L}(A)$ と書くことにする．

定義 4.6 (モデル)**.** $\mathrm{L} \subseteq \mathbb{N}$ を言語とし，T を L 文の集合とする．

$M \subseteq$ が T の可算モデルであるとは，$M = |M| \oplus \mathrm{val}^M_t \oplus \mathrm{val}^M_f$ によって定まる集合 $|M|, \mathrm{val}^M_t, \mathrm{val}^M_f$ に関して次が成り立つことと定める．

1. val^M_t は $\mathrm{val}^M_t \colon \mathrm{Term}_{\mathrm{L}(|M|)} \to |M|$ なる全域関数.

[*40] $\sigma \in \mathrm{Sent_L} \leftrightarrow \sigma \in \mathrm{Form_L} \wedge \sigma$に自由変数が含まれない．

2. val^M_f は $\mathrm{val}^M_f : \mathrm{Sent}_{\mathrm{L}(|M|)} \to |M|$ なる全域関数.
3. $\mathrm{val}^M_t, \mathrm{val}^M_f$ は次の意味で well-definded：L の関数記号 f^m_i,（等号を含む）関係記号 R^m_j，そして項 $t_1, ..., t_m, s_1, ..., s_m$[*41]に対して以下が正しい[*42].

$$\forall i < m(\mathrm{val}^M_t(t_i) = \mathrm{val}^M_t(s_i)) \to \mathrm{val}^M_t(\langle \mathsf{f}^m_i, \langle t_1, ..., t_m\rangle\rangle) = \mathrm{val}^M_t(\langle \mathsf{f}^m_i, \langle s_1, ..., s_m\rangle\rangle) \wedge \\ \mathrm{val}^M_f(\langle \mathsf{R}^m_j, \langle t_1, ..., t_m\rangle\rangle) = \mathrm{val}^M_f(\langle \mathsf{R}^m_j, \langle s_1, ..., s_m\rangle\rangle)$$

4. val^M_f はタルスキの真理定義条項を満たす．すなわち，各 $\varphi, \psi \in \mathrm{Sent}_{\mathrm{L}(|M|)}$ について以下が正しい.
   - $\mathrm{val}^M_f(\langle \wedge, \langle \varphi, \psi\rangle\rangle) = \mathrm{val}^M_f(\varphi) \cdot \mathrm{val}^M_f(\psi)$
   - $\mathrm{val}^M_f(\langle \vee, \langle \varphi, \psi\rangle\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}^M_f(\varphi) = 1 \vee \mathrm{val}^M_f(\psi) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
   - $\mathrm{val}^M_f(\langle \forall \mathsf{v}_k, \varphi\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}^M_f(\varphi[\mathsf{c}_a/\mathsf{v}_k]) = 1 \text{ for all } a \in |M| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
   - $\mathrm{val}^M_f(\langle \exists \mathsf{v}_k, \varphi\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}^M_f(\varphi[\mathsf{c}_a/\mathsf{v}_k]) = 1 \text{ for some } a \in |M| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
   - $\mathrm{val}^M_f(\langle \neg, \varphi\rangle) = 1 - \mathrm{val}^M_f(\varphi)$
5. $\varphi \in T$ について $\mathrm{val}^M_f(\varphi) = 1$.

ここで $\varphi[\mathsf{c}_a/\mathsf{v}_k]$ は φ 中の自由な v_k に c_a を代入した論理式を表わす．この操作を実行する関数は再帰定理によって作れる．$\varphi \in \mathrm{Sent}_{\mathrm{L}(|M|)}$ について $\mathrm{val}^M_f(\varphi) = 1$ であるとき $M \models \varphi$ と表記し，$\mathrm{val}^M_f(\varphi) = 0$ であるとき $M \not\models \varphi$ と書く.

注意 4.7. RCA_0 など弱い体系で一般に存在が証明できない初等図式の存在をモデルの定義に紛れ混ませている．このような若干普通の数学とは異なる定義の下で健全性定理[*43]が RCA_0 で証明可能である（[Sim09] Theorem II.8.8)．本稿ではより強い強健全性定理を証明するため証明は省く.

証明可能関係 $(\vdash)$ は Tait 計算（cf. 付録 6）を RCA_0 で形式化することで定める.

定義 4.8 (Tait 計算の導出を用いた可証性述語の定義)**.** 付録 6 にある Tait 計算に関するほとんど[*44]すべての定義は RCA_0 で形式化できる[*45]．そこで「d は理論 T から φ を導く導出木であ

---

*41 ここの m は体系内部の $m \in \mathbb{N}$ である（cf. 注意 3.29).
*42 この条件から等号公理が充足される.
*43 T のモデルが存在すれば T は無矛盾．ここで証明可能関係は何でも良い.
*44 定義 6.20 における集合 $\mathrm{Sub}(\varphi)$ の存在は RCA_0 では一般にはいえない（cf. 定義 4.10).
*45 この作業を実行するにあたっては，付録 6 に従い変数も束縛変数と自由変数に分けて定義する必要があり，したがって項も命題 4.5 とは定義が異なる．しかし，有限列の扱いと Σ^0_1 帰納法に慣れ親しんでいれば本稿で述べるアイデアから形式的な定義や証明を書き下す作業はルーチンワークであり退屈だろう（その作業の一助となるように付録 6 のほとんどすべての定義は再帰定理が容易に適用できるように成形してある)．また，付録 6 の形式化を書き下すことで得られる厳密性は，新たな記号の導入によって失われる可読性に見合わない．以上の理由から本稿では命題 4.5 をはじめとした厳密ではないがシンプルな定義を以降で用いる.

る[*46]」を形式化した論理式を $\mathrm{Prf}(d,T,\varphi)$ と書く[*47]．これは Δ^0_1 で定義でき，したがって「φ は理論 T から証明可能である」が $\exists d(\mathrm{Prf}(d,T,\varphi))$ として Σ^0_1 で定まる（cf. 定義 6.22）．最後に，文の集合 T に対し「T は無矛盾である」を形式化した論理式 $\mathrm{Con}(T)$ が Π^0_1 で定まる[*48]（cf. 定義 6.27）．

定理 4.9. 上記のように形式化した Tait 計算について，変数の代入（補題 6.15），代入補題（補題 6.17），還元補題（補題 6.18），カット除去定理（定理 6.19），部分論理式性（系 6.21），遡及補題（補題 6.24）が RCA_0 内部でも証明できる．

証明. 変数の代入：まず，”導出木 d 中の c を b で置き換える”を実行する関数を RCA_0 で作り，それを $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ とする．その上で c と b を固定し，次を d による帰納法で示せばよい[*49]．

$$\forall d(d \text{ が導出木} \to f(d,c,b) \text{ も導出木})$$

これ以外のほとんどすべての主張の証明では，与えられた導出木に関して主張が成り立つことを，その部分導出木について主張が成り立つことに還元している．この点に着目し，そこでの還元の形式をそのまま再帰定理の形に書き直すことで定義できる導出木の変換が，正しく導出木上で全域的であることを Σ^0_1 帰納法によって証明すればよい． □

RCA_0 など，初等ダイアグラム全体の存在が一般には証明できない体系では定義 4.6 のモデルを用いた議論は難しい．初等ダイアグラム全体の存在をいうためには ACA_0 ですら往々にして力不足である．これでは健全性定理を使える場面が著しく制限されてしまう．しかし，カット除去定理から従う部分論理式性を持つ Tait 計算では，理論 T が矛盾すれば，その矛盾に至る証明に登場する論理式を高々等号公理と T の部分論理式への代入例に絞ることができる．それゆえ，初等ダイアグラム全体がなくとも部分論理式への項の代入例に真偽が定まっていれば健全性定理の証明には十分であることが分かる．この考え方の下で定義されるのが次の弱モデルである．

定義 4.10 (RCA_0)**.** $\mathrm{L} \subseteq \mathbb{N}$ 論理式 φ について，φ の部分論理式への項の代入例全体（cf. 定義 6.20）からなる集合，あるいはクラスを $\mathrm{Sub}_{\mathrm{L}}(\varphi)$ とかく[*50]．また論理式の集合 T に対し，$\mathrm{Sub}_{\mathrm{L}}(T) := \bigcup_{\varphi\in T}\mathrm{Sub}_{\mathrm{L}}(\varphi)$ と定める．これも集合として存在しない場合はクラスとして扱う．

定義 4.11 (弱モデル，RCA_0)**.** $\mathrm{L} \subseteq \mathbb{N}$ を言語とし，T を L 文の集合とする．

[*46] 導出木 d の根ノードについている論理式の有限集合を $d(\mathrm{root})$ で表すとしたとき，以下が意図する主張である．一見 Π^0_1 に見えるが，$d(\mathrm{root})$ が有限集合であるため $\Delta^0_1(\mathsf{RCA}_0)$ で形式化できる．

$$d(\mathrm{root}) \subseteq \{\, \neg\psi \mid \psi \in T \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L}) \,\} \cup \{\varphi\}.$$

[*47] ここでの φ はゲーデル数である．

[*48] $\forall d(d \text{ は導出木} \to (d(\mathrm{root}) \not\subseteq \{\, \neg\psi \mid \psi \in T \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L}) \,\}))$.

[*49] 一般に，導出木 d, d' について，$|d| < |d'|$ が必ずしもそのコードの大小，すなわち自然数の大小 $d < d'$ を導くとは限らない．しかし，”d は導出木である”を素朴に形式化すれば，d が d' の部分導出木であるときは $d < d'$ を保証できるだろう．

[*50] 一般には Σ^0_1 論理式で定義されるため，RCA_0 で存在することが保証できない．必要に応じてクラスとして扱う．

$M \subseteq$ が T の弱可算モデルであるとは，$M = |M| \oplus \mathrm{val}_t^M \oplus \mathrm{val}_f^M$ によって定まる集合 $|M|, \mathrm{val}_t^M, \mathrm{val}_f^M$ に関して次が成り立つことと定める．

- val_t^M と val_f^M は定義 4.6 の 1 と 3 の条件を満たす．
- val_f^M は $\mathrm{val}_f^M : \mathrm{Sub}_{\mathrm{L}(|M|)} \to 2$ なる部分関数であって，次を満たす．
  - $\mathrm{dom}(\mathrm{val}_f^M)$ は $D := \mathrm{NNF}[\{\neg\psi | \psi \in T\}] \cup \mathrm{Eq(L)}$ の要素について部分論理式への項の代入例に閉じる．つまり次を満たす[*51]，

$$\forall\varphi \in D[\mathrm{Sub}_{\mathrm{L}(|M|)}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(\mathrm{val}_f^M)]$$

  - D の元に関してはタルスキの真理定義条項（cf. 定義 4.6 の 4）を満たす．

ここで NNF は否定標準形への変換であり，$\mathrm{NNF}[S] = \{\, \mathrm{NNF}(\varphi) \mid \varphi \in S \,\}$ である．ここで，$\sigma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{L}(|M|)}$ について $\mathrm{val}_f^M(\sigma) \downarrow = 1$ のとき $M \models \sigma$ と表記し，$\mathrm{val}_f^M(\sigma) \downarrow = 0$ のとき $M \not\models \sigma$ と表記する．

定理 4.12 (強健全性定理．[Sim09] Theorem II.8.10 (strong soundness thorem))**.**

$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \forall \mathrm{L} \forall T (T \subseteq \mathrm{Sent_L} \land T \text{ に弱モデルが存在する} \to \mathrm{Con}(T)).$$

証明. RCA_0 内部で議論する．M を L 理論 T の弱モデルとし，$\neg\mathrm{Con}(T)$ を仮定する．このときある有限[*52]部分 $\Gamma \subseteq T \cup \mathrm{Eq(L)}$ と d で $\vdash_d \{\, \mathrm{NNF}(\neg\varphi) \mid \varphi \in \Gamma \,\}$ となるものが存在する．

いま $\Gamma = \{\psi_0, ..., \psi_n\}$ と書くことにする．このとき，d のカットを除去することにより $\bigcup_{i<n} \mathrm{Sub}_{\mathrm{L}(|M|)}(\mathrm{NNF}(\neg\psi_i))$ の要素のみからなる $\{\, \mathrm{NNF}(\neg\varphi) \mid \varphi \in \Gamma \,\}$ の導出木 d' が得られる．この d' についている各シーケント Δ について，ある $\psi \in \Delta$ で $M \models \psi$ となることが部分導出木の高さによる帰納法で証明できる．よって特に $\exists i < n(M \not\models \psi_i)$ となるが，これは M が L 理論 T の弱モデルであることに反する． □

定理 4.13 (第二不完全性定理)**.** RCA_0 を含意する[*53]再帰的に公理化された理論 T について，T の無矛盾性をメタで仮定すると $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ が成り立つ．

証明. $\mathrm{Prv}(T, \varphi) := \exists d \mathrm{Prf}(d, T, \varphi)$ が以下に記す Hilbert-Bernays-Löb の可導性条件 D1,D2,D3 を満たすことを示せば十分[*54]．

D1　$T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Prv}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$

D2　$T \vdash \mathrm{Prv}_T(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \land \mathrm{Prv}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prv}_T(\ulcorner\psi\urcorner)$

D3　$T \vdash \mathrm{Prv}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \mathrm{Prv}_T(\ulcorner\mathrm{Prv}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$

[*51] ここで $\mathrm{Sub}_{\mathrm{L}(|M|)}(\mathrm{NNF}[\{\neg\psi|\psi \in T\}] \cup \mathrm{Eq(L)})$ が集合として存在しない場合はクラスとして扱う．

[*52] 体系内部の有限である．必ずしもメタ有限ではないことに注意せよ．ただし，言語がメタ有限で T もメタ有限な理論ならば，等号公理がメタ有限個になるためこの Γ もメタ有限になる．この事実は以降で用いる．

[*53] 無論ここの RCA_0 は一階算術の $\mathsf{I}\Sigma_1$ で十分である．後者で示す場合は有限集合を有限列として扱い，再帰的内包公理によって集合を作る操作を言語の追加を行う操作で置き換える．

[*54] 例えば [菊池 14] や [y.16] を見よ．

ここで φ, ψ はメタの文であり，$\ulcorner\varphi\urcorner$ は φ のゲーデル数である．D1 は $(T\vdash)\mathsf{PA}^-$ の Σ_1 完全性から従う．D2 は命題 6.26 を形式化すればよい．D3 は形式化された Σ_1 完全性を文でなく論理式に関して証明すればよいのだった．もう一段階詳しく述べれば，すべての Σ_1 論理式[*55]φ について

$$T \vdash \forall \overline{x}[\varphi(\overline{x}) \to \mathrm{Prv}(T, \mathrm{Subst}(\ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x}))]$$

が正しいことを Σ^0_1 論理式の構成に従って証明する．ここで $\mathrm{Subst}(\ulcorner\varphi\urcorner, \overline{x})$ は $\ulcorner\varphi\urcorner$ 中の変数に $\overline{x}$ の値を代入する関数である．詳細は [Boo93] pp.40-49 を見よ[*56]． □

系 4.14. RCA_0 を含意する再帰的に公理化された理論 T について，その無矛盾性をメタで仮定すると次が成り立つ．

$$T \nvdash \exists T \text{ の弱モデル}.$$

4.2 coded ωモデル

定義 4.15 (RCA_0，coded ωモデル)**.** 集合 $M \subseteq \mathbb{N}$ が countable coded ωモデル[*57]であるとは，可算 ω モデル $(\mathbb{N}, \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}, +, \cdot, 0, 1, <)$ と M を同一しているときの言い回しである．ただしここで $M_n = \{\, m \mid (m, n) \in M \,\}$ である．

ACA_0^+ では coded ωモデル$M \subseteq \mathbb{N}$ に対し $\mathrm{eDiag}(M)$ が作れる．実際，基本ダイアグラム $\mathrm{Diag}(M)$ は再帰的内包公理で作ることができ，定義 2.32 を元に ω モデル再帰公理用の論理式を記述すればよい．

一方，一般に ACA_0 では $\mathrm{eDiag}(M)$ 全体は作れない．しかし，ACA_0 でメタ有限再帰公理が証明できることから，任意メタ有限サイズの近似は作ることができる．いま各 $n \in \omega$ に対し，$\mathrm{eDiag}(M)$ のうち論理記号（$\forall, \exists, \wedge, \ldots$）が高々 n 個のものを集めてきた集合を $\mathrm{eDiag}(M) \upharpoonright n$ で表わすことしよう．このとき各 $n \in \omega$ に対して $\mathsf{ACA}_0 \vdash \forall M \exists(\mathrm{eDiag}(M) \upharpoonright n)$ が成り立つ．そして RCA_0 をはじめとして，二階算術の理論の多くは有限公理化できる[*58]．それゆえ，coded ωモデル に関する議論は ACA_0 があれば十分行える．

議論のベースを弱くして他の公理を比較する逆数学的視点に立つと，可能な限り弱いところで議論を行うミニマリスト的振る舞いが正統だろう．したがってモデルではなく，弱モデルの定義を参考にして正式に coded ωモデル と真偽の概念を定式化する．

---

*55 ここは文でない．

*56 先に Turing functional Φ^X_e の正規形定理を示すのはよい準備運動になるだろう．

*57 この countable は自明なため以降では省略する．元は countable coded ω-model であり，少々訳出が難しい．端的に可算 ω モデルのコードである，した方が定義を反映しているのだが，メタのそれと区別が付かなくなってしまう．前に形式化された，と付けるのも一つの案だが，名前が長くなってしまい少し苦しい．したがって姑息な手だが，本稿では日本語と英語を混ぜて coded ωモデル と書くことで形式化されたそれを指すことにした．

*58 いわゆる Big five はすべて有限公理化可能である．

補題 4.16. 次を満たす関数 $\mathrm{val}_t\colon \mathrm{Term}_{\mathrm{L}_2} \to \mathbb{N}$ が存在する：任意の $t_0, t_1 \in \mathrm{Term}_{\mathrm{L}_2}$ について

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}_t(\ulcorner 0 \urcorner) &= 0 \\
\mathrm{val}_t(\ulcorner 1 \urcorner) &= 1 \\
\mathrm{val}_t(\langle +, \langle t_0, t_1 \rangle\rangle) &= \mathrm{val}_t(t_0) + \mathrm{val}_t(t_1) \\
\mathrm{val}_t(\langle \cdot, \langle t_0, t_1 \rangle\rangle) &= \mathrm{val}_t(t_0) \cdot \mathrm{val}_t(t_1)
\end{aligned}$$

が正しい．

証明. 再帰定理による． □

定義 4.17 (RCA_0)**.** $T \subseteq \mathbb{N}$ を L_2 理論とする．coded ωモデル$M \subseteq \mathbb{N}$ が T のモデルであるとは，次を満たす部分関数 $\mathrm{val}^M\colon \mathrm{Sent}_{\mathrm{L}_2 \cup \{\, \mathsf{C}_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}} \to 2$ が存在することをいう．

- $\mathrm{dom}(\mathrm{val}^M)$ の論理式に関して val^M はタルスキの真理定義条項を満たす（cf. 定義 2.30, 4.11）．すなわち，次が正しい．
  - $\mathrm{val}^M(\langle <, \langle t, s \rangle\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}_t(t) < \mathrm{val}_t(s) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $\mathrm{val}^M(\langle =, \langle t, s \rangle\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}_t(t) = \mathrm{val}_t(s) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $\mathrm{val}^M(\langle \in, \langle t, \mathsf{C}_n \rangle\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}_t(t) \in M_n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $\mathrm{val}^M(\langle \land, \langle \varphi, \psi \rangle\rangle) = \mathrm{val}^M(\varphi) \cdot \mathrm{val}^M(\psi)$
  - $\mathrm{val}^M(\langle \lor, \langle \varphi, \psi \rangle\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}^M(\varphi) = 1 \lor \mathrm{val}^M(\psi) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $\mathrm{val}^M(\langle \forall \mathsf{v}_k, \varphi \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}^M(\varphi[n/\mathsf{v}_k]) = 1 \text{ for all } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ [*59]
  - $\mathrm{val}^M(\langle \exists \mathsf{v}_k, \varphi \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}^M(\varphi[n/\mathsf{v}_k]) = 1 \text{ for some } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $\mathrm{val}^M(\langle \forall \mathsf{V}_k, \varphi \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}^M(\varphi[\mathsf{C}_n/\mathsf{V}_k]) = 1 \text{ for all } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
  - $\mathrm{val}^M(\langle \exists \mathsf{V}_k, \varphi \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathrm{val}^M(\varphi[\mathsf{C}_n/\mathsf{V}_k]) = 1 \text{ for some } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

[*59] $\varphi[n/\mathsf{v}_k]$ を厳密に記述するためには，論理式 ψ 中の自由な v_k へ項 t を代入する関数 $\mathrm{Subst}(\psi, k, t)$ と $\mathrm{num}(n) = \ulcorner \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\text{ 個}} \urcorner$ を用意して $\mathrm{Subst}(\varphi, k, \mathrm{num}(n))$ とする．特に強調する必要がない限り本文のラフな記法を以降でも用いる．

– $\mathrm{val}^M(\langle\neg,\varphi\rangle) = 1 - \mathrm{val}^M(\varphi)$

- $T \subseteq \mathrm{dom}(\mathrm{val}^M)$
- $\mathrm{dom}(\mathrm{val}^M)$ は部分論理式への項の代入例に閉じる．
- $\forall\sigma \in T(\mathrm{val}^M(\sigma) = 1)$

val^M のことを以降では単に付値という．$M \models \varphi$ の記法は定義は弱モデルのそれを流用する．以降 $\langle\wedge, \langle\varphi,\psi\rangle\rangle$ のように形式的に書かず $\varphi \wedge \psi$ と略記する．

命題 4.18 (RCA$_0$，付値の well-definded 性)**.** 上記の条件を見たす二つの $\mathrm{val}_0^M, \mathrm{val}_1^M$ があれば，各 $\varphi \in \mathrm{dom}(\mathrm{val}_0^M) \cap \mathrm{dom}(\mathrm{val}_1^M)$ については必ず $\mathrm{val}_0^M(\varphi) = \mathrm{val}_1^M(\varphi)$ となる．

証明. 論理式の構成に関する帰納法. □

命題 4.19 (ACA$_0$)**.** 各メタの L_2 文 φ について，任意の coded ωモデル でその真偽が定まる．

証明. メタの L_2 文 φ と coded ωモデル$M(\subseteq \mathbb{N})$ を固定する．いまメタ有限再帰公理から，n を（φ に含まれる論理記号の数）$\times 100$[*60]とすると，定義 2.32 を形式化して得られる無限列の有限部分 $\{Y_m\}_{m<n}$ で次を満たすものが得られる．

$$S := \mathrm{Sub}_{\mathrm{L}_2 \cup \{\,\mathsf{c}_n | n \in \mathbb{N}\,\}}(\{\varphi\} \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L}_2)) \subseteq \mathrm{NNF}^{-1}[\textstyle\bigcup_{m<n} Y_m]$$

このとき $\mathrm{dom}(\mathrm{val}^M) = S$ を満たす val^M が以下で定まる．

$$\mathrm{val}^M(\psi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \psi \in S \wedge \psi \in \mathrm{NNF}^{-1}[\bigcup_{m<n} Y_m] \\ 0 & \text{if } \psi \in S \wedge \psi \notin \mathrm{NNF}^{-1}[\bigcup_{m<n} Y_m]. \end{cases}$$

□

系 4.20 (ACA$_0$)**.** メタの L_2 文 σ について $M \models \sigma$ なる coded ωモデル M の存在が証明できたとする．このとき M から自然な σ の弱モデルが構成でき，したがって $\mathrm{Con}(\sigma)$ が帰結する．

証明. 先の命題における val^M を $\mathrm{dom}(\varphi) = \mathrm{Sub}_{\mathrm{L}_2 \cup \{\,\mathsf{c}_n | n \in \mathbb{N}\,\}}(\mathrm{NNF}(\{\neg\sigma\}) \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L}_2))$ となるように取り直す．このときの $\mathbb{N} \cup \{M_n | n \in \mathbb{N}\} \oplus \mathrm{val}_t \oplus \mathrm{val}^M$ が弱モデルの条件を満たす．よって定理 4.12 から $\mathrm{Con}(\sigma)$ が得られる[*61]. □

系 4.21 (ACA$_0^+$)**.** 与えられた任意の coded ωモデル$M(\subseteq \mathbb{N})$ に対し，付値 val^M が全域的にとれる．

通常の ω モデルで成り立つことは往々にして形式化された coded ωモデル でも成り立つことが ACA$_0$ で証明できる．この例をいくつか紹介しよう．注目すべきは，付値の定義域中の論理式 φ に関する coded ωモデル での真偽が一段階メタ（つまり次の命題では ACA$_0$）では算術論理式で表されるという点である．これは，特に $\varphi \in \Sigma_1^1$ など，φ が算術的でなくとも成り立つ．

---

*60 実際には $\times 1$ でよいはずだが，検証がめんどくさかったので適当に大きくした．
*61 より厳密には定義 2.19 の変換を経由して $\sigma^I + \mathsf{II}$ の弱モデルを構成する．

命題 4.22 (ACA$_0$)**.** coded ωモデル において帰納法公理が常に正しい．形式的には，$M \subseteq \mathbb{N}$ を coded ωモデル とし，$I_n\varphi \in \mathrm{dom}(\mathrm{val}^M)$ だと仮定する．このとき $\mathrm{val}^M(I_n\varphi) = 1$ である．

証明. φ に含まれる n 以外の変数の数だけパラメータ $n_1, ..., n_j \in \mathbb{N}, A_1, ..., A_k \in M$[*62]をとって代入し，それを $\varphi(n, n_1, ..., n_k, A_1, ..., A_k)$ と書く代わりに略して $\varphi(n)$ と書く．$M \models (\varphi(0) \wedge \forall(\varphi(n) \to \varphi(n+1)))$ と仮定する[*63]．これは次の略記である．

$$\mathrm{val}^M(\varphi(0)) = 1 \wedge \forall n(\mathrm{val}^M(\varphi(n)) = 1 \to \mathrm{val}^M(\varphi(n+1)) = 1)$$

したがって算術的帰納法から $\forall n(\mathrm{val}^M(\varphi(n)) = 1)$ が成り立つ．これは $M \models \forall n\varphi(n)$ を意味する．　□

命題 4.23 (ACA$_0$)**.** coded ωモデル はメタの算術的論理式に関して絶対的である．形式的には次が成り立つ：$M \subseteq \mathbb{N}$ を coded ωモデル とする．M のパラメータの出現を許したメタの各算術的論理式 φ について以下が正しい[*64]．

$$\varphi \leftrightarrow \mathrm{val}^M(\varphi) = 1.$$

証明. $\varphi \in \mathrm{dom}(\mathrm{val}^M)$ と算術的論理式の構成に関する帰納法.　□

系 4.24. coded ωモデル はメタの Π^1_1 論理式に関して下方絶対的である．

4.3 ω モデル反映を用いた理論の分離

いよいよ理論の分離を行う．ここでは理論 S, T について，$S < T$ を $T \vdash S$ かつ $S \nvdash T$ の略記とする．

定義 4.25 (ω モデル反映)**.** 再帰的公理化可能な L_2 理論 T について，以下の文を T の ω モデル反映（ω- model reflection）といい，RFN(T) と表記する．[*65]．

$$\forall X \exists \text{ coded } \omega\text{モデル } M(X \in M \models T + \mathsf{ACA}_0)$$

ただしここで「$X \in M \models T + \mathsf{ACA}_0$」とは次の主張を指す．

$$\exists m(M_m = X) \wedge \exists \mathrm{val}^M[\text{部分関数 } \mathrm{val}^M \text{が } T + \mathsf{ACA}_0 \text{に関して定義 4.17 の条件を満たす.}]$$

[*62] 以降は断らないが，$A_i \in M$ と書いている A_i は形式的には集合定数 C_i である．また j, k はメタ自然数とは限らないことに注意せよ．

[*63] φ には自然数や M の集合がパラメータとして（形式的）有限個入っていてよい．

[*64] M のパラメータをとる，という操作は形式的には M に依存しないため，この主張は「パラメータを含んだ任意の算術的論理式について，M を coded ωモデル とすると...」という順番で書くことができる．よって φ をとってから，付値関数の定義域を φ に応じて広くとることができる．しかしこの書き方は便利ではあるが直感に反するためか，使用している場面を筆者は見たことがない．

[*65] $\forall X \exists M(X \in M \wedge M$ は $T + \mathsf{RCA}_0$の coded ωモデル) としてもよいが，ω モデル反映を考える文脈では主として ACA_0 より強い理論を扱う．

はじめに以下の性質を指摘しておく．

- T を ACA_0 を含む再帰的に公理化された無矛盾な理論とする．系 4.20 から $\mathsf{ACA}_0 \vdash \mathsf{RFN}(T) \to \mathrm{Con}(T)$ が成り立つことから，第二不完全性定理により $T \nvdash \mathsf{RFN}(T)$ が従う．したがって L_2 理論 S について $S \vdash \mathsf{RFN}(T) \Rightarrow T \nvdash S$ が正しい．この性質を利用することで理論の分離が行える．
- $\mathsf{RFN}(T)$ は $\mathrm{Con}(T)$ と異なり集合存在公理であるため逆数学の俎上に上がる．換言すれば，$\mathsf{RFN}(T)$ から別の集合存在公理を示せる場合もある．

注意 4.26. $\mathsf{RFN}(T)$ は Π^1_2 文である．

注意 4.27. T が有限公理化できない場合はメタで T(のゲーデル数) $= \Phi_e$ なる $e \in \omega$ をとり，体系内部で $\sigma \in T$ を $\Phi_e(\varphi) = 1$ の略記とみなす[*66]．したがって再帰的公理化可能の条件は算術的公理化可能に広げることができる（この場合 $\Phi_e^{\mathrm{TJ}(n,\varnothing)}(\sigma) = 1$ に変わる）が，少なくとも本稿では扱わないため定義から排除した．もし理論 T が T' と有限公理化できる場合は T' で ω モデル反映公理を定義するとこの手間が省略できるため，有限公理化可能な理論は常にその有限公理化によって ω モデル反映を定義する．

注意 4.28. 前の注で述べたことから，$M \subseteq \mathbb{N}$ を ACA_0 の coded ωモデル するとき，$M \models \mathsf{ACA}_0$ とは厳密には ACA_0 の有限公理化 S について $M \models S$ という主張である．したがって σ をメタの算術的内包公理としたとき，$M \models \sigma$ は自明でない．これは次のように正統化される．

まず $S \vdash \sigma$ の証明を p とする．これはメタ有限長さであることに注意して p に現れるすべての論理式を含むように $\mathrm{dom}(\mathrm{val}^M)$ を広くとる．簡単のために p はモーダスポーネンスと全称化のみを推論規則とする証明体系における証明を一列に潰したものと考える．つまり p は論理式の有限列 $p = \langle p_0, p_1, ..., p_n = \sigma \rangle$ であるとする．帰納法で $\forall i < n \mathrm{val}^M(p_i) = 1$ が証明できる．よって $\mathrm{val}^M(\sigma) = 1$ が得られる．

命題 4.29. $\mathsf{ACA}_0 \vdash \forall X \exists$ coded ωモデル $M s.t. (X \in M \models \mathsf{RCA}_0)$．よって特に $\mathsf{ACA}_0 \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{RCA}_0)$．

証明. 命題 3.13 も参照せよ．まず X を任意にとって固定すると，$\{\, e \mid \Phi_e^X \in 2^{\mathbb{N}} \,\}$ が算術的内包公理からとれる．このとき $M := \{(m,e) | \Phi_e^X(m) = 1\}$ は $\{\, Y \subseteq \mathbb{N} \mid Y \leq_{\mathrm{T}} X \,\}$ をコードしている RCA_0 の coded ωモデル である．$M \models \mathsf{RCA}_0$ の確認のためには計算論的和に閉じることと Turing 還元に閉じることを示せば十分だが，どちらも容易である．□

よく知られた事実として次がある．

命題 4.30. ACA_0 上で次が同値．

[*66] この場合，体系内部ではメタ有限ではなく形式的有限長さの φ で $\Phi_e(\sigma) = 1$ となる場合を考慮する必要がある（いわゆる overspill を考慮する必要がある）．

1. ACA_0^+
2. $\mathsf{RFN}(\mathsf{ACA}_0)$

よって特に $\mathsf{ACA}_0^+ \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{ACA}_0)$.

証明. $(1 \to 2)$ X を任意にとって $M := \{ (m, e) \mid \Phi_e^{\mathrm{TJ}(n,X)} \in 2^{\mathbb{N}} \text{ for some } n \in \mathbb{N} \}$ とすればよい.

$(2 \to 1)$ X を任意にとり，M を $X \in M \models \mathsf{ACA}_0$ なる coded ωモデル とする．まず $X = M_{n_0}$ である $n_0 \in \mathbb{N}$ を一つ固定する．次に，以下を満たす全域関数 f を作る．

$$\begin{cases} f(0) & = n_0 \\ f(n+1) & = (\mu m)[M \models \mathrm{TJ}(M_{f(n)}) = M_m] \end{cases}$$

このとき命題 4.23 から M における Turing ジャンプと外の Turing ジャンプは一致する．したがって $\mathrm{TJ}(\omega, X) = \{M_{f(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が成り立つ． □

したがって何かしらの T について $\mathsf{RFN}(T)$ を仮定する状況では val^M の全域性を仮定できる．

ω モデル反映 $\mathsf{RFN}(T)$ の定義からはあまり「反映」の意味が感じられないかもしれない．これには元となった公理が別にあり，それが次の Γ-RFN である．

定義 4.31 (Γ-ω モデル反映)**.** φ は $X_1, ..., X_n$ 以外に自由変数がない論理式とする．このとき，次を RFN_φ と書く．

$$\begin{aligned} &\forall X_1, ..., X_n(\varphi(X_1, ..., X_n) \\ &\to \exists \text{ coded } \omega\text{モデル } M(X_1, ..., X_n \in M \wedge M \models \varphi(X_1, ..., X_n) + \mathsf{ACA}_0)) \end{aligned}$$

そして $\Gamma\text{-}\mathsf{RFN} := \{ \mathsf{RFN}_\varphi \mid \varphi \in \Gamma \}$ とし，例によって $\Gamma\text{-}\mathsf{RFN}_0 := \Gamma\text{-}\mathsf{RFN} + \mathsf{ACA}_0$ と定める．

これは外で正しい文について，それを充足するモデルがとれる，という点で反映公理らしさがある．$\mathsf{RFN}(T)$ は，外で正しい Π^1_1 文が T のモデルでも正しいことから（命題 4.24），ある種 Π^1_1-RFN の強化ともみなせる．

定義 4.32. 下記のように，右側の論理式の全称閉方からなる公理図式にそれぞれ左の名前をつける．

$$\begin{aligned} \text{unique } \Gamma\text{-AC} &: \forall n \exists ! Y \varphi(n, Y) \to \exists Y \forall n \varphi(n, Y_n) \quad \text{where } \varphi \in \Gamma \\ \Gamma\text{-AC} &: \forall n \exists Y \varphi(n, Y) \to \exists Y \forall n \varphi(n, Y_n) \quad \text{where } \varphi \in \Gamma \\ \text{unique } \Gamma\text{-TDC} &: \forall X \exists ! Y \varphi(X, Y) \wedge \mathrm{WO}(Z) \to \exists Y \forall a \in \mathrm{field}(Z) \varphi(Y^a, Y_a) \quad \text{where } \varphi \in \Gamma \\ \Gamma\text{-DC} &: \forall X \exists Y \varphi(X, Y) \to \exists Y \forall n \varphi(Y^n, Y_n) \quad \text{where } \varphi \in \Gamma \end{aligned}$$

ただしここで，Y^n とは $\{ (m, i) \mid i < n \wedge (m, i) \in Y \}$ であり，Y^a は $\{ (m, b) \mid b <_Z a \wedge (m, b) \in Y \}$ を表わす（cf. 定義 3.69）．そしてそれぞれに RCA_0 を付け加えた理論を例によって下に 0 をつけて表わす．

注意 4.33. 以降では Γ として Π^1_0 以上の場合を主として扱う．上記の全ては最も弱い unique Π^1_0-AC_0 でさえ ACA_0 を含意するため，以降の理論は常に ACA_0 を含意することに注意せよ．これは推測だが，おそらくこの事実を根拠として $\Gamma \supseteq \Pi^1_0$ の場合に上記の理論を定める際には RCA_0 ではなく，はじめから ACA_0 をつけて定義される場合も多い．もちろん，Γ として Π^0_2 以下を議論する文脈ではこの限りではない．

注意 4.34. unique Π^1_0-AC_0 はあらゆる文献で weak Σ^1_1-AC_0（あるいは unique Σ^1_1-AC_0）と表記されている．この慣例は致命的な問題がある．実際，unique Σ^1_1-AC_0 は Δ^1_1-CA_0 と同値であることが容易に確認でき，これは unique Π^1_0-AC_0 より真に強い（cf.[Wes77]Thorem 1.1 [*67]）．すなわち，unique Σ^1_1-AC_0 は weak Σ^1_1-AC_0 より真に強いのである．

注意 4.35. Σ^1_1 論理式には Σ^0_1 と同様に万能論理式がある．詳しくは述べないが，Σ^1_1 正規形定理（cf.[Sim09] 補題 V.1.4）から $\exists f \forall n \Phi^X_e(f[n], y)\downarrow$ が Π^1_1 万能論理式となる．直感的には $\mathbb{N}$ で添え字づけられた X 再帰的木の列 $\{T_y := \{\sigma \in \mathrm{Seq} \mid \forall \tau \subseteq \sigma(\Phi^X_e(\tau, y)\downarrow)\}\}_{y\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ について，y 番目の木 T_y が ill-founded である，という主張である．これに限らずすべての再帰的な二項関係について，一様に整礎であるか否かが判定できるように Σ^1_1 論理式を定めれば万能な Σ^1_1 が得られる．従って Σ^1_1-... の形の理論は有限公理化可能[*68]である．

Σ^1_1-AC_0 と Σ^1_1-DC_0 が最も古く，逆数学の黎明期である 1970 年代から研究されている [Fri75][*69]．unique Σ^1_1-TDC は [Rüe02] で導入された．そこでは前者は weak Σ^1_1-TDC と表記されており，主として一意性の条件を外したバージョンである Σ^1_1-TDC の強さが調べられている．

Rüede は証明しなかったが，ATR_0 と unique Σ^1_1-TDC_0 は同値である[*70]．手短に説明しよう．unique Σ^1_1-TDC_0 は Δ^1_1-TR_0 と明らかに同値である．また，[Sim09] Theorem V.5.1 から ATR_0 と Σ^1_1-SEP_0[*71]は同値であり，そこでの証明から即座に Σ^1_1-SEP_0 と Δ^1_1-TR_0 の同値性が従う．以上を命題としてまとめておこう．

命題 4.36. $\mathsf{ATR}_0 \equiv \Sigma^1_1$-$\mathsf{SEP}_0 \equiv \Delta^1_1$-$\mathsf{TR}_0 \equiv$ unique Σ^1_1-TDC_0

証明は省くが，以下の同値性もよく知られている．

命題 4.37 ([Sim09] Thorem VIII.5.12)**.** Σ^1_1-$\mathsf{DC}_0 \equiv \Pi^1_2$-$\mathsf{RFN}_0$

したがって ATR_0 が Π^1_2 文で有限公理化可能であること（定理 3.73）から次が成り立つ．

---

*67 この周辺の理論の強さは [Mon08] が整理されており分かりやすい．

*68 計算論的和の生成を公理にいれることで複数の自由集合変数を含む公理は一つの集合変数を含めば十分である．

*69 当時はそこにすべての論理式に関する帰納法公理を付けて考えていた．

*70 例えば [Mic21] Corollary 2.12 で明示的に書かれている．

*71
$$\neg\exists n(\varphi_0(n) \land \varphi_1(n)) \to \exists X \forall n((\varphi_0(n) \to n \in X) \land (\varphi_1(n) \to n \notin X) \quad \text{where} \quad \varphi_0, \varphi_1 \in \Sigma^1_1))$$

系 4.38. $\mathsf{ATR}_0 + \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0 \vdash \mathsf{RFN}(\mathsf{ATR}_0)$

よって特に $\mathsf{ATR}_0 + \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0 \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{ATR}_0)$ であるため $\mathsf{ATR}_0 \nvdash \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0$ が従う．ただ，これはより強く，ω モデルで証拠がとれる．つまり，$M \models \mathsf{ATR}_0$ だが $M \not\models \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0$ である ω モデル M がとれる．この ω モデルの存在は次の汎用的な定理から証明できる．

定理 4.39 (ω モデル不完全性 [Sim09]Theorem VIII.5.6 (の弱化版[*72]))**.** T を ACA_0 を含意する有限公理化可能な L_2 理論とする．このとき，もし T の可算 ω モデルがあれば，以下の可算 ω モデルも存在する．

$$T + \neg\exists \text{ coded } \omega\text{-model of } T$$

証明. 以下のように三つの L_2 文にそれぞれ (1), (2), (3) と名前を付ける．

(1) $T + \neg\exists$ T の coded ωモデル

(2) $\exists$ T の coded ωモデル

(3) $\neg\exists$ (1) の coded ωモデル

$T^* := \mathsf{ACA}_0 + (2) + (3)$ とおく．結論のためには T^* が矛盾していることを示せば十分である．なぜなら，いま $\mathsf{ACA}_0 + (2)$ は仮定から無矛盾なので，T^* が矛盾している場合 $\mathsf{ACA}_0 + (2) \vdash \neg(3)$ が導かれて，$\mathcal{P}(\omega) \models \exists$ (1) の coded ωモデル となり，求める ω モデルが得られるからである．

この段落では $T^*(\vdash \mathsf{ACA}_0)$ の中で議論する．まず (2) より，$N' \models T$ なる coded ωモデル N' が存在する．もし仮に $N' \not\models (2)$ だとすると，(3) の否定が成り立ち矛盾する．よって $N' \models (2)$ である．そして (3) は正しい Π^1_1 文なので命題 4.24 から $N' \models (3)$ である，以上を合わせて $N' \models T^*$ となる．いま T^* は ACA_0 を含意する有限の理論であることから，系 4.20 によって T^* が無矛盾であると分かる．つまり，$T^* \vdash \mathrm{Con}(T^*)$ が導かれた．したがって第二不完全性定理（cf. 定理 4.13）から T^* は矛盾していなければいけない． □

定理 4.40. ATR_0 を充足し，$\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0$ を充足しない ω モデルが存在する．

証明. $\mathcal{P}(\omega) \models \mathsf{ATR}_0$ よりレーベンハイム-スコーレムの下降定理から ATR_0 には可算 ω モデルが存在する[*73]．よって ω モデル不完全性より $\mathsf{ATR}_0 + \neg\exists$ coded ω-model of ATR_0 の可算 ω モデル M も存在する．ATR_0 は Π^1_2 で有限公理化できることから $M \not\models \Pi^1_2\text{-}\mathsf{RFN}$，すなわち $M \not\models \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0$ である． □

定義していない概念を多く用いるため証明を省くが，次が成り立つ．

[*72] [Sim09] では有限公理化でなく再帰的公理化で正しいと書いている．しかし筆者はこれを確認できていない．ただし，T の条件を $T \vdash \mathsf{ACA}_0^+$ に強化すれば再帰的公理化可能の場合でも正しいことは，ここに書いた証明と ACA_0^+ で ω モデルの初等ダイアグラムが作れることから従う．

[*73] あるいは最小の β モデル $M = \{ X \subseteq \omega \mid X \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{HJ}(n, \varnothing) \text{ for some } n \in \omega \}$ も証拠となる．β モデルとは，そのモデルの元をパラメータに許した正しい Σ^1_1 文が，そのモデルでも正しくなるような ω モデルのことである．$\mathrm{HJ}(\varnothing)$ とは $\varnothing$ のハイパージャンプと呼ばれるもので，再帰的線形順序が整列か否かの情報がすべてコードされたものであり，Turing ジャンプの Π^1_1 アナロジーと見なせる．詳細は [Sim09] VII 章を見よ．

定理 4.41 ([Sim09] VIII.4.19)**.** $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}(\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0)$.

系 4.42. ATR_0 と $\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0$ は比較不能である．

証明. 定理 4.41 から $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathrm{Con}(\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0)$．よって $\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0 \nvdash \mathsf{ATR}_0$． □

次も古くから知られている．

定理 4.43. $\mathsf{ATR}_0 > \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$ であり，$\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$ と ACA_0^+ は比較不可能．

証明. $\mathsf{ATR}_0 \vdash \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$ の証明は省く．[Sim09] Theorem V.8.3 を見よ．逆が成り立たないことの証明は色々考えられるが，例えば容易に $\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0 \vdash \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$ が確認でき，先ほど述べた $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}(\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{DC}_0)$ と合わせて $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}(\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0)$ が成り立つ．よって $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathrm{Con}(\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0)$ となることから従う．

再帰的飽和な非 ω モデルを用いる議論により $\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$ は ACA_0 の Π^1_2 保存的拡大であることが証明できる（[Sim09] Theorem IX.4.4)．この事実と，$\mathsf{ACA}_0 \nvdash \mathsf{ACA}_0^+$ であり，$\forall X \exists \mathrm{TJ}(\omega, X)$ は Π^1_2 文であることから $\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0 \nvdash \mathsf{ACA}_0^+$ が従う．$\mathsf{ACA}_0^+ \nvdash \Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$ にも様々な証明が考えられる．

その 1：ω モデルによって分離する．ACA_0^+ は $S := \{\, X \subseteq \omega \mid X \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(n \cdot \omega, \varnothing)\,\}$[*74]を最小の ω モデルに持つが，$\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0$ の最小の ω モデルは超算術的集合全体であり，S より真に大きい (cf.[Sim09] Thorem VIII.4.8)．よって S が証拠となる．

その 2：実は定理 4.46 は $\Sigma^1_1\text{-}\mathsf{AC}_0 + \Sigma^1_1$ 帰納法から証明できるため，したがってそこから $\mathsf{ACA}_0^+ + \Sigma^1_1$ 帰納法の無矛盾性が導かれる． □

定義 4.44 (ω モデル反映の反復)**.** $n \in \omega$ について次のように $\mathsf{RFN}^n(T)$ を再帰で定める．

$$\begin{aligned} \mathsf{RFN}^0(T) &= T \\ \mathsf{RFN}^{n+1}(T) &= \mathsf{RFN}(\mathsf{RFN}^n(T) + \mathsf{ACA}_0) \end{aligned}$$

また $\mathsf{RFN}^n(T)_0 := \mathsf{RFN}^n(T) + \mathsf{ACA}_0$ と定める．

命題 4.45. $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}^2(\mathsf{ACA}_0)$．よって命題 4.30 から $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}(\mathsf{ACA}_0^+)$ となり，したがって $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathrm{Con}(\mathsf{ACA}_0^+)$.

証明. 4.43 の証明で定義した ω モデル S は $\omega \times \omega$ 回の Turing ジャンプの繰り返しからも定義できる．よって ATR_0 の内部において，辞書式順序 $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_r)$ に沿った Turing ジャンプの超限再帰によって得られる集合から ACA_0^+ の coded ωモデル が構成できる．これを相対化したものも同様の証明によって正しいため $\mathsf{RFN}(\mathsf{ACA}_0^+)$ が得られる． □

より一般に $\mathsf{ATR}_0 \vdash \mathsf{RFN}^n(\mathsf{ACA}_0)$ はすべての $n \in \omega$ について成り立つ．ここではさらに一般化したものを最後に示そう．

[*74] $$\begin{cases} \mathrm{TJ}(0 \cdot \omega, X) & = X \\ \mathrm{TJ}((n+1) \cdot \omega, X) & = \mathrm{TJ}(\omega, \mathrm{TJ}(n \cdot \omega, X)) \end{cases}$$

定理 4.46. $\theta(X,Y)$ を高々 X,Y のみを自由変数にもつ算術論理式とする．このとき各 $n\in\omega$ について次が正しい．

$$\mathsf{ATR}_0\vdash\forall X\exists!Y\theta(X,Y)\to\mathsf{RFN}^n(\forall X\exists!Y\theta(X,Y))$$

証明. ここでが $n=2$ の場合のみを示すが，それ以上も同様である．A を固定する．$\psi(X,Y)$ を次の算術的論理式とする．

$$\begin{aligned}\forall m\forall k\leq m\forall l,r\leq k\{&(m=0\to Y_0=A)\land\\&(m=4k+1\to\theta(X_k,Y_m))\land\\&(m=4k+2\land k=\langle l,r\rangle\to[(\Phi_r^{X_l}\in 2^{\mathbb{N}}\to Y_m=\Phi_r^{X_l})\land\\&\qquad(\Phi_r^{X_l}\notin 2^{\mathbb{N}}\to Y_m=\varnothing)])\land\\&(m=4k+3\land k=\langle l,r\rangle\to Y_m=X_l\oplus X_r)\land\\&(m=4k+4\to Y_m=\mathrm{TJ}(X_k))\}\end{aligned}$$

Claim 1. $\forall X\exists!Y\psi(X,Y)$

Claim の証明． X を固定する．Y の一意性は明らか．存在を示す．まず X をパラメータに持ち，$\forall m\rho(m,Y)=\psi(X,Y)$ なる算術的論理式 ρ をとる．いま $\forall X\exists!Y\theta(X,Y)$ であるので $\forall m\exists!Y\rho(n,Y)$ が正しい．定理 4.43 から特に unique Π^1_0-AC_0 が使えて，$\forall m\rho(m,Y_m)$ を満たす Y がとれる．この Y が条件を満たす． Claim の証明終わり．

いま $X=\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $X_n=A$ $(n\in\mathbb{N})$，つまり全てが A である集合族とする．先の Claim と unique Σ^1_1-$\mathrm{TDC}_0(\equiv\mathsf{ATR}_0)$（命題 4.36）によって $Y_0=X\land\forall n\psi(Y_n,Y_{n+1})$ なる Y がとれる．加えて，再び先の Claim からこの Y も一意的である．以上を整理すると，

$$\forall A\exists!Y(=\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}})(Y_0=\{A\}_{n\in\mathbb{N}}\land\forall n\psi(Y_n,Y_{n+1}))$$

が正しい．

ここで任意にとった A に対して上記により一意的にとれる Y から $M_{\langle l,r\rangle}=(Y_l)_r$ で定める $M=\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$[*75]は A を含み，$\forall X\exists!Y\theta(X,Y)+\mathsf{ACA}_0$ を満たす coded ωモデル である．

さて，いま $\theta'(A,Y)$ を $Y_0=\{A\}_{n\in\mathbb{N}}\land\forall n\psi(Y_n,Y_{n+1},A)$ とおくと $\forall A\exists!Y\theta'(A,Y)$ であり θ' は算術的である．したがって上記 ψ の定義中の $\theta(X_k,Y_n)$ を $\theta'(X_k,Y_n)$ に取り替えたものを ψ' として同様の議論を行えば，任意にとった A について，それを含み，$\forall X\exists!Y\theta'(X,Y)+\mathsf{ACA}_0$ を満たす coded ωモデル N が構成できる．特に $N\models\forall X\exists!Y\theta'(X,Y)$ から $N\models\mathsf{RFN}(\forall X\exists!Y\theta(X,Y))$ が成り立つ．従って $\mathsf{RFN}(\mathsf{RFN}(\forall X\exists!Y\theta(X,Y))+\mathsf{ACA}_0)$ すなわち $\mathsf{RFN}^2(\forall X\exists!Y\theta(X,Y))$ が結論できる． □

5 終わりに

4.3 節の内容に興味を持ってくれた読者へ．

*75 直感的には $M=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}Y_n$

[Rüe02] では本稿で省略した Σ^1_1-TDC_0 や，以下の ω モデル反映の超限回反復

$$\forall X, Z(\mathrm{WO}(Z) \to \exists Y \forall a \in \mathrm{field}(Z))(Y^a \in Y_a \land X \in Y_a \models \mathsf{RFN}(T)_0)$$

についても議論しており個人的にとても面白かった[*76]．[Sim09] の VIII.3,4.5 節を勉強しつつ読むのが良いだろう．

証明論にも興味のある読者は [PW22] も面白いと思う．そこではもう一つの reflection 公理が定義され，本稿で述べた ω モデル反映との関連について述べられている．筆者は途中，いやだいぶ冒頭で挫折した．

本稿で調べた理論に Σ^1_1-DC_0 や unique Π^1_0-AC_0 がある．これらは超算術的解析（現代的な定義はおそらく [Mon08] が初出）という理論のグループに属している．この理論に属する他の公理の研究としては，たとえば [Goh23] が新しく，イントロ部分だけでも超算術的解析研究のサーベイがてら読むことを勧める．

6　付録：Tait 計算のカット除去定理

アプリオリな記号は $\land, \lor, \neg, \exists, \forall$ であり，$\to$ や $\leftrightarrow$ はそれぞれ略記として扱う．また Tait 計算では，論理式は否定標準形のものだけを扱う．よって Tait 計算を考えている間は，$\neg\varphi$ と書いたら，それはド・モルガンの法則と二重否定の除去によって記号 $\neg$ をできる限り中に押し込んだ否定標準形の論理式を表している．つまり，$\neg$ は論理式に作用する関数だと拡大解釈する．特に論理式において記号 $\neg$ は原子論理式にのみついていることに注意せよ．

項と論理式，及び代入の再帰的定義

以下自由変数と束縛変数を分けるアイデアや用語は [新井 21] を参考にした．

定義 6.1 (自由変数記号と束縛変数記号)**.** 自由変数と束縛変数は記号レベルで分けて考える．以降では自由変数を主に $a, b, c, \ldots$ で表し，束縛変数を主に $x, y, z, \ldots$ で表す．

定義 6.2 (擬項（semi term）)**.** 擬項を以下のように再帰的に定義する．

1. 定数と自由変数と束縛変数は擬項である．
2. $t_1, \ldots, t_n$ が擬項で，f が n 変数の関数記号ならば $f(t_1, \ldots, t_n)$ も擬項である．

擬項から束縛変数を取り除いたものが項である[*77]．特に項は擬項である．擬項中の自由変数へ

[*76] 若干へこたれ気味だった M2 の夏に，東北大の某 S さんからこの論文を紹介して頂いて，何これおもしれー！となって二階算術モチベが回復したという思い出補正が入っていることは否定しない．ちなみに紹介して頂いた，と書いたがなぜか PC の文献フォルダには入っていた．日付は 2022/10/18 だった．

[*77] 形式的には次にように定める．

定義 6.3 (項)**.**

1. 定数と自由変数は項である．

の代入を次のように再帰で定める.

定義 6.4 (擬項への代入)**.** 擬項 t の構成に関する再帰によって，自由変数 a へ擬項 u を代入した結果の $t[u/a]$ を以下のように定義する.

1. $v[u/a] = \begin{cases} u & \text{if } v = a \\ v & \text{if } v \neq a \end{cases}$
2. $f(t_1, ..., t_n)[u/a] = f(t_1[u/a], ..., t_n[u/a])$

定義 6.5 (論理式)**.** 論理式は次にように束縛変数の代入との同時再帰で定義する.

1. R を n 変数関係記号，$t_1, ..., t_n$ を項とするとき，$R(t_1, ..., t_n)$ と $\neg R(t_1, ..., t_n)$ は論理式．a を自由変数，x を束縛変数とするとき，$R(t_1, ..., t_n)[x/a] = R(t_1[x/a], ..., t_n[x/a])$，$(\neg R(t_1, ..., t_n))[x/a] = \neg(R(t_1, ..., t_n)[x/a])$
2. φ, ψ を論理式，a を自由変数，x を束縛変数とするとき，$\forall x\varphi[x/a]$，$\exists x\varphi[x/a]$，$\varphi \vee \psi$，$\varphi \wedge \psi$ も論理式.
   b を自由変数，y を束縛変数とするとき，$(\varphi \vee \psi)[y/b] = \varphi[y/b] \vee \psi[y/b]$，$(\varphi \wedge \psi)[y/b] = \varphi[y/b] \wedge \psi[y/b]$，$(\forall x\varphi[x/a])[y/b] = \forall x(\psi[x/a][y/b])$，$(\exists x\varphi[x/a])[y/b] = \exists x(\psi[x/a][y/b])$.

定義 6.6 (論理式への代入)**.** 論理式への擬項の代入を再帰で定義する.

1. R を n 変数関係記号，$t_1, ..., t_n$ を項，u を擬項とするとき，
   $R(t_1, ..., t_n)[u/a] = R(t_1[u/a], ..., t_n[u/a])$，$(\neg R(t_1, ..., t_n))[u/a] = \neg(R(t_1, ..., t_n)[u/a])$
2. φ, ψ を論理式，t を擬項，a, b を自由変数とするとき，$(\varphi \vee \psi)[t/b] = \varphi[t/b] \vee \psi[t/b]$，$(\varphi \wedge \psi)[t/b] = \varphi[t/b] \wedge \psi[t/b]$，$(\forall x\varphi[x/a])[t/b] = \forall x(\psi[x/a][t/b])$，$(\exists x\varphi[x/a])[t/b] = \exists x(\psi[x/a][t/b])$.

定義 6.7 (論理式の複雑さ)**.** 論理式 φ に対し，その複雑さ $|\varphi| \in \omega$ を論理式の構成に関する再帰で次にように定義する.

1. φ が原子論理式なら $|\varphi| = |\neg\varphi| = 0$
2. $|\varphi \vee \psi| = |\varphi \wedge \psi| = \max\{|\varphi|, |\psi|\} + 1$
3. $|\forall x\varphi[x/a]| = |\exists x\varphi[x/a]| = |\varphi| + 1$

命題 6.8. t を項，a を自由変数とするとき $|\varphi[t/a]| = |\varphi|$

証明. φ の複雑さによる帰納法で示される. □

---

2. $t_1, ..., t_n$ が項で，f が n 変数の関数記号ならば $f(t_1, ..., t_n)$ も項である.

推論規則と導出木

論理式の有限集合を推件（sequent）とよび[*78]，大抵の場合 Γ や Δ などのギリシャ文字で表す．本稿で定義する Tait 計算の推論規則は以下の 7 つ[*79]．

推論規則：

$$(A)\ \varphi, \neg\varphi \qquad \text{where } \varphi \text{ は原子論理式}$$

$$(\mathrm{weak})\ \frac{\Gamma}{\Gamma, \varphi}$$

$$(\vee)\ \frac{\Gamma, \varphi_0, \varphi_1}{\Gamma, \varphi_0 \vee \varphi_1}$$

$$(\wedge)\ \frac{\Gamma, \varphi_0 \qquad \Gamma, \varphi_1}{\Gamma, \varphi_0 \wedge \varphi_1}$$

$$(\mathrm{cut})\ \frac{\Gamma, \varphi \qquad \Gamma, \neg\varphi}{\Gamma}$$

$$(\exists)\ \frac{\Gamma, \varphi[t/a]}{\Gamma, \exists x \varphi[x/a]}$$

$$(\forall)\ \frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \forall x \varphi[x/a]} \text{ ここで } a \text{ は } \Gamma \text{ に現われていない．}$$

推論規則は一般的に書くとそれぞれ次の形をしている．

$$(*)\ \frac{\Gamma, \varphi_i \quad (i < k)}{\Gamma, \Phi}$$

ここで横棒の上を $(*)$ の上件，下を $(*)$ の下件という．k は上件の数で $1 \leq k \leq 2$．他にも次のように用語を定める．

- Φ を $(*)$ の主論理式（principal formula）．
- φ_i を $(*)$ の副論理式（minor formula）．
- Γ を $(*)$ の横論理式（side formula）．

$(\vee_0)$ と $(\vee_1)$ はまとめて $(\vee)$ と表記することもある．

定義 6.9 (導出木)**.** Tait 計算の導出木 (derivation tree) とは，各頂点に推件が張られた有限二分木であって，次の 2 条件を満たすものをいう．

[*78] 無限集合や多重集合は推件ではない．

[*79] 他にも様々な流儀がある．$(weak)$ を強化し一度に任意有限個の論理式を下に追加できる規則に変えたもの [田中 19] や，$(weak)$ を無くしてその役割を (A) に持たせるために $[\Gamma, \varphi, \neg\varphi \ \ \text{where } \varphi \text{ は原子論理式}]$ で (A) を置き換えたもの [Sch77] がある．後者の流儀では $(weak)$ がないために導出の高さ（以降で定義する $|d|$ を指している）に関してより精密な分析が行えるが，今回の議論にはその分析は不要であり，証明の手間も僅かに増えるために採用しなかった．

$(*)$	主論理式	副論理式	上件の数
(A)	$\varphi, \neg\varphi$	無し	0
$(weak)$	φ	無し	1
$(\vee)$	$\varphi_0 \vee \varphi_1$	φ_0, φ_1	1
$(\wedge)$	$\varphi_0 \wedge \varphi_1$	φ_0, φ_1	2
(cut)	無し	$\varphi, \neg\varphi$	2
$(\exists)$	$\exists x\varphi[x/a]$	$\varphi[t/a]$	1
$(\forall)$	$\forall x\varphi[x/a]$	φ	1

- 葉ノードに貼られている推件は (A) の形である.
- 子ノードと親ノードに貼られている推件の関係は $(weak), (\vee), (\wedge), (cut), (\exists), (\forall)$ のいずれかの推論規則に沿った上件と下件の関係である.

導出木に関する用語を次のように定義する.

- d が Tait 計算の導出木であって根ノードに張られている推件が Γ であるとき $\vdash_d \Gamma$ と表記し，d は Γ の導出（木）であるという.
- $d' \subseteq d$ なる木 d' を部分導出木（subderivation tree）とよぶ．また，導出木 d の根ノードについて，その子ノードを切り出してきた高々 2 個の部分導出木を直部分導出木（direct subderivation tree）とよぶ.
- d の最後の推論規則とは，もし根ノードが子ノードを持たなければ (A) であり，さもなくば根ノードとその子ノードについている推件間の推論規則（$(weak), (\vee), etc...$）である.
- 導出木の高さ $|d|$ を次のように再帰で定める．もし d が根ノードのみなら $|d| = 0$．さもなくば d_i を直部分導出木として
$$|d| = (\max_i |d_i|) + 1$$
- 導出木のカットランク $\rho(d)$ を次のように再帰で定める．もし d が根ノードのみなら $\rho(d) = 0$．さもなくば d_i を直部分導出木として
$$\rho(d) = \begin{cases} \max_i\{\rho(d_0), \rho(d_1), |\varphi| + 1\} & \text{if 最後の推論規則が } (cut), \varphi \text{ がその主論理式} \\ \max_i\{\rho(d_0), \rho(d_1)\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

例 6.10. 任意の φ について $\vdash_d \varphi, \neg\varphi$

証明. φ の構成による帰納法で示す．φ が原子論理式なら明らか．$\vee, \wedge$ は次の通り.
$\exists, \forall$ は以下のようになる.

$\square$

定義 6.11. 推件 Γ，項 t，自由変数 a について $\Gamma[t/a] := \{\, \varphi[t/a] \mid \varphi \in \Gamma \,\}$ と定める.

a が Γ に現われなければ $\Gamma[t/a] = \Gamma$.

$$
(\wedge)\dfrac{(\vee)\dfrac{(weak)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi,\neg\varphi}}{\varphi,\psi,\neg\varphi}}{\varphi\vee\psi,\neg\varphi}\qquad(\vee)\dfrac{(weak)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi,\neg\psi}}{\varphi,\psi,\neg\psi}}{\varphi\vee\psi,\neg\psi}}{\varphi\vee\psi,\underbrace{\neg\varphi\wedge\neg\psi}_{\neg(\varphi\vee\psi)}}
\qquad
(\wedge)\dfrac{(\vee)\dfrac{(weak)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi,\neg\varphi}}{\varphi,\neg\varphi,\neg\psi}}{\neg\varphi\vee\neg\psi,\varphi}\qquad(\vee)\dfrac{(weak)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\psi,\neg\psi}}{\neg\varphi,\psi,\neg\psi}}{\neg\varphi\vee\neg\psi,\psi}}{\varphi\wedge\psi,\underbrace{\neg\varphi\vee\neg\psi}_{\neg(\varphi\wedge\psi)}}
$$

$$
(\forall)\dfrac{(\exists)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi(=\varphi[a/a]),\neg\varphi}}{\exists x\varphi[x/a],\neg\varphi}}{\exists x\varphi[x/a],\forall x\neg\varphi[x/a]}
\qquad
(\forall)\dfrac{(\exists)\dfrac{\dfrac{\vdots}{\varphi,\neg\varphi}}{\varphi,\exists x\neg\varphi[x/a]}}{\forall x\varphi[x/a],\exists x\neg\varphi[x/a]}
$$

カット除去定理

以下のカット除去定理の証明は [Sch77] 及び [Lee07] を参考にした．

補題 6.12. φ を論理式，a,b,c を相異なる自由変数，x を束縛変数，s を擬項，t を項とする．このとき以下が成り立つ．

1. $s[t/a][b/a]=s[t[b/a]/a]$
2. $\varphi[t/a][b/a]=\varphi[t[b/a]/a]$
3. $s[x/a][b/a]=s[x/a]$
4. $(\exists\varphi[x/a])[b/a]=\exists\varphi[x/a]$
5. $s[t/a][b/c]=s[b/c][t[b/c]/a]$
6. $\varphi[t/a][b/c]=\varphi[b/c][t[b/c]/a]$
7. $s[x/a][b/c]=s[b/c][x/a]$
8. $(\exists x\varphi[x/a])[b/c]=\exists x(\varphi[b/c][x/a])$

証明. 偶数の主張はそれぞれ一つ前の奇数のそれから即座に従う．奇数の主張は擬項 s の構成に関する帰納法で示す．

1. s が a のときは

$$
\begin{aligned}
a[t[b/a]/a]&=t[b/a]\\
&=a[t/a][b/a]
\end{aligned}
$$

より正しい．s がそれ以外の場合両辺はどちらも s になる．インダクションステップは明らか．3 も 1 と同様の方針で証明できる．

5. s が a のときは

$$\begin{aligned} a[b/c][t[b/c]/a] &= a[t[b/c]/a] && (\because a \neq c) \\ &= t[b/c] \\ &= a[t/a][b/c] \end{aligned}$$

s が c のときは

$$\begin{aligned} c[b/c][t[b/c]/a] &= b[t[b/c]/a] \\ &= b \\ &= c[b/c] \\ &= c[t/a][b/c] \end{aligned}$$

s がそれ以外の場合は両辺どちらも s.

7. $a \neq c$ より明らか.

□

定義 6.13 (導出木への代入)**.** d を導出木とする．d を構成する各推件中の変数 v を擬項 s で置き換えたものが再び導出木となる場合，それを $d[s/v]$ と表記する．

注 6.14. $|d[s/v]| = |d|$, $\rho(d[s/v]) = \rho(d)$,

補題 6.15 (変数の代入)**.** c, b を相異なる自由変数とする．このとき任意の導出木 d について，$\vdash_d \Gamma$ ならば $\vdash_{d[c/b]} \Gamma[c/b]$ である．さらに $d[c/b]$ の全ての推件に b は現れない．

証明. 導出木 d 中に現れる c の全てを b で置き換えたものが再び導出木の条件を満たすことを $|d| \in \omega$ の帰納法で示す.

原子論理式中の変数を取り替えても依然原子論理式なので $|d| = 0$ のときは明らか．最後の推論規則が $\wedge, \vee, weak, cut$ の場合は明らか．次に，d の最後の推論規則が以下のように $(\exists)$ である場合を考える．

$$(\exists)\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Delta, \varphi[t/a]}}{\Delta, \exists x \varphi[x/a]}$$

このとき，次もまた $(\exists)$ の推論規則の形になっていることを確認すればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Delta[b/c], \varphi[t/a][b/c]}}{\Delta[b/c], (\exists x \varphi[x/a])[b/c]}$$

$a = c$ の場合：補題 6.12 より $\varphi[t/a][b/c] = \varphi[t/a][b/a] = \varphi[t[b/a]/a]$ であり，$(\exists x \varphi[x/a])[b/c] = (\exists \varphi[x/a])[b/a] = \exists \varphi[x/a]$ となるのでよい．$a \neq c$ の場合も同様で，補題 6.12 より $\varphi[t/a][b/c] =$

$\varphi[b/c][t[b/c]/a]$ であり，$(\exists x\varphi[x/a])[b/c] = \exists x(\varphi[b/c][x/a])$ となるのでいずれにせよ (∃) の推論規則に沿っている．

d の最後の推論規則が以下のように (∀) の場合を最後に考える．

$$(\forall)\ \frac{\dfrac{\vdots}{\Delta, \varphi}}{\Delta, \forall x\varphi[x/a]} \quad \text{ここで } a \text{ は } \Delta \text{ に現われていない．}$$

(∃) の場合と同様に，以下もまた (∀) の推論規則の形になっていることを確認すればよい．

$$\frac{\dfrac{\vdots}{\Delta[b/c], \varphi[b/c]}}{\Delta[b/c], (\forall x\varphi[x/a])[b/c]}$$

$a = c$ の場合：このとき $\varphi[b/c] = \varphi[b/a]$ であり，下件については補題 6.12 より $(\exists x\varphi[x/a])[b/a] = \exists x(\varphi[b/a][x/a])$ なのでよい．

$a \neq c$ の場合：補題 6.12 より $(\forall x\varphi[x/a])[b/c] = \forall x(\varphi[b/c][x/a])$ となるのでよい．□

補題 6.16. φ を論理式，a, b を自由変数，x を束縛変数，s を擬項，t, u を項とし，c を a や b でなく，s, u, t, φ にも含まれない自由変数とする．このとき以下が成り立つ．

1. $s[c/a][u/b][t[u/b]/c] = s[t/a][u/b]$
2. $\varphi[c/a][u/b][t[u/b]/c] = \varphi[t/a][u/b]$
3. $s[x/a][u/b] = s[c/a][u/b][x/c]$
4. $(\exists x\varphi[x/a])[u/b] = \exists x((\varphi[c/a][u/b])[x/c])$

証明. 4 は 3 から，2 は 1 から即座に従う．1.$a = b$ の場合は，$s[c/a][u/a][t[u/a]/c] = s[c/a][t[u/a]/c] = s[t[u/a]/a]$ であるので，$s[t[u/a]/a] = s[t/a][u/a]$ を示せば十分．これは s の帰納法で簡単に示すことができる．以降 $a \neq b$ とした上で，改めて擬項 s に関する帰納法で示す．

s が a のとき．

$$\begin{aligned} a[c/a][u/b][t[u/b]/c] &= c[u/b][t[u/b]/c] \\ &= c[t[u/b]/c] \\ &= t[u/b] \\ &= a[t/a][u/b] \end{aligned}$$

s が b のとき．

$$\begin{aligned} b[c/a][u/b][t[u/b]/c] &= b[u/b][t[u/b]/c] \\ &= u[t[u/b]/c] \\ &= u && (\because c \text{ は } u \text{ に現われない．}) \\ &= b[u/b] \\ &= b[t/a][u/b] \end{aligned}$$

s が a,b 以外の変数あるいは定数ならば明らかに両者は s である．インダクションステップは明らか．

3. $a=b$ の場合は $s[x/a][u/a]=s[x/a]=s[c/a][x/c]=s[c/a][u/a][x/c]$ よりよい．以降 $a\neq b$ とする．項 s に関する帰納法で示す．s が a のとき．

$$\begin{aligned} a[x/a][u/b] &= x \\ &= c[x/c] \\ &= c[u/b][x/c] \\ &= a[c/a][u/b][x/c] \end{aligned}$$

s が b のとき．

$$\begin{aligned} b[x/a][u/b] &= u \\ &= u[x/c] \\ &= b[u/b][x/c] \\ &= b[c/a][u/b][x/c] \end{aligned}$$

s が a,b 以外の変数あるいは定数ならば明らかに両者は s である．インダクションステップは明らか．

□

補題 6.17 (代入補題)**.** $\vdash_d \Gamma$ とし，b を自由変数，u を項とする．このとき，ある d' で $\vdash_{d'} \Gamma[u/b]$ かつ $|d|=|d'|$ かつ $\rho(d')=\rho(d)$ を満たすものが存在する．

証明. まずはじめに，u に含まれる変数が一つも現われないような導出木 d について主張が成り立つことを $|d|\in\omega$ の帰納法で示す．$|d|=0$ なら明らか．d の最後の推論が $weak,\vee,\wedge,cut$ なら帰納法の仮定から即座に従う．最後の推論が以下のように $(\exists)$ の場合を考える．

$$(\exists)\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Delta,\varphi[t/a]}}{\Delta,\exists x\varphi[x/a]}$$

帰納法の仮定からある d_0 で $\vdash_{d_0} \Delta[u/b],\varphi[t/a][u/b]$ であり，補題 6.16 より適当な新しい変数 c によって[*80] $\varphi[t/a][u/b]=\varphi[c/a][u/b][t[u/b]/c]$ となる．同補題によって $(\exists x\varphi[x/a])[u/b]=\exists x((\varphi[c/a][u/b])[x/c])$ となり $(\exists)$ の下件の形に沿っていることが確認できる．

d の最後が以下のように $(\forall)$ の場合を考える．

$$(\forall)\ \dfrac{\Delta,\varphi}{\Delta,\forall x\varphi[x/a]}\quad \text{ここで } a \text{ は } \Gamma \text{ に現われていない．}$$

$a=b$ の場合は Δ 中に a が含まれていないことから $\Delta[u/a]=\Delta$ であり，$(\forall x\varphi[x/a])[u/a]=\forall x\varphi[x/a]$ なので何も書き変える必要がない．$a\neq b$ とする．帰納法の仮定からある d_1 で $\vdash_{d_1}$

[*80] 実際には c は論理式中に現われない．

$\Delta[u/b], \varphi[u/b]$ である．u に a が含まれていないため $(\forall x\varphi[x/a])[u/b] = \forall x\varphi[u/b][x/a]$ となりよい．以上で帰納法が完了した．

最後に u に現われる変数が導出木にも現われている場合を考える．いま u に現れる変数は $b_1, ..., b_n$ のみであるとする．ここで項 u 及び導出木 d 中に一切現れず，b とも異なる同数の変数を $c_1, ..., c_n$ とする．$u' = u[c_1/b_1][c_2/b_2]\cdots[c_n/b_n]$ とおけば，u' に含まれる変数は一つも d に現れない．この u' について $\vdash_{d'} \Gamma[u'/b]$ を満たす d' を取れば補題 6.15 から

$$\vdash_{d'[b_n/c_n][b_{n-1}/c_{n-1}]\cdots[b_1/c_1]} \Gamma[u'/b][b_n/c_n][b_{n-1}/c_{n-1}]\cdots[b_1/c_1]$$

が得られる．すると

$$\Gamma[u'/b][b_n/c_n][b_{n-1}/c_{n-1}]\cdots[b_1/c_1] = \Gamma[u/b]$$

である[*81]ので結論が従う． □

補題 6.18 (還元補題)**.** $\vdash_{d_0} \Gamma, \varphi$ かつ $\vdash_{d_1} \Delta, \neg\varphi$ でさらに $\rho(d_0), \rho(d_1) \leq |\varphi|$ であるとき，$\rho(d) \leq |\varphi|$ を満たしつつ $\vdash_d \Gamma, \Delta$ となる導出木 d が存在する．

証明. $|d_0| + |d_1| \in \omega$ による帰納法で示す．まず d_0, d_1 のいずれかの高さが 0 の場合を考える．d_0 の高さが 0 だと仮定して一般性を失わない．このとき φ は原子論理式であり，d_0 の根ノードには $(A)\ \varphi, \neg\varphi$ が貼られている．ゆえにこのとき Γ は $\neg\varphi$ のシングルトンなので，d_1 が条件を満たす．

次に d_0 の最後の推論規則の主論理式が φ でないか，あるいは d_1 の最後の推論規則の主論理式が $\neg\varphi$ でない場合を考える．いま d_0 の最後の推論規則の主論理式が φ でない場合を考えて一般性を失わない．

$$d_0 : (*)\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Lambda, \varphi, \psi_i \quad (i < k)}}{\Lambda, \varphi, \Phi} \qquad\qquad d_1 : (*')\ \dfrac{\vdots}{\Delta, \neg\varphi}$$

まず $(*) = (cut)$ の場合，つまり d_0 が次の形の場合を考える．

$$(cut)\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi, \psi} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi, \neg\psi}}{\Gamma, \varphi}$$

いま d_0 の直部分導出木を左から $d_{0,0}, d_{0,1}$ とする．このとき $|d_{0,0}| + |d_1| < |d_0| + |d_1|$ であるので，帰納法の仮定によりある d_0' で $\vdash_{d_0'} \Gamma, \Delta, \psi$ かつ $\rho(d_0') \leq |\varphi|$ となる．同様にある d_1' で $\vdash_{d_1'} \Gamma, \Delta, \neg\psi$ かつ $\rho(d_1') \leq |\varphi|$ となる．よって次を d' とすればよい．

[*81] 略記すると $\Gamma[u[\overline{c_i}/\overline{b_i}]/b][\overline{b_i}/\overline{c_i}] = \Gamma[u/b]$ である．これも補題 6.12 などと同様の方針で証明できる．実際，$b[u[\overline{c_i}/\overline{b_i}]/b][\overline{b_i}/\overline{c_i}] = u[\overline{c_i}/\overline{b_i}][\overline{b_i}/\overline{c_i}] = u = b[u/b]$ であり，b 以外の変数については代入と関係ないので，帰納的に全ての擬項に関して等号が成り立ち，従って全ての論理式及び推件について正しい．

$$\dfrac{d'_0 : \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \psi} \qquad d'_1 : \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \neg\psi}}{\Gamma, \Delta}\ (cut)$$

実際 $|\psi| + 1 \le \rho(d_0) \le |\varphi|$ であるので $\rho(d) = \max\{|\psi| + 1, \rho(d'_0), \rho(d'_1)\} \le |\varphi|$ となり，カットランクの条件もよい．$(*) = (\wedge)$ の場合も同様である．$(*)$ が $(weak), (\vee), (\exists)$ の場合は帰納法の仮定から容易に従う．$(*)$ が $(\forall)$ の場合，つまり d_0 が次の形の場合を考える．

$$(\forall)\ \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Lambda, \varphi, \psi}}{\Lambda, \varphi, \forall x\psi[x/a]}\ \text{ここで } a \text{ は } \Lambda, \varphi \text{ に現われていない．}$$

c を新しい自由変数とする．このとき補題 6.15 より $\vdash_{d_1[c/a]} \Delta[c/a], \neg\varphi$ であるので，d_0 の直部分導出木と $d_1[c/a]$ の対に帰納法の仮定を適用して $\vdash_{d'} \Lambda, \Delta[c/a], \psi$ なる d' を得る．このとき

$$(\forall)\ \dfrac{d' : \dfrac{\vdots}{\Lambda, \Delta[c/a], \psi}}{\Lambda, \Delta[c/a], \forall x\psi[x/a]}\ \text{ここで } a \text{ は } \Lambda, \Delta[c/a] \text{ に現われていない．}$$

が導出木であるので，再び補題 6.15 によって c を a に戻せば求める導出木が得られる．

最後に d_0 の最後の推論規則の主論理式が φ であり，かつ d_1 の最後の推論規則の主論理式が $\neg\varphi$ である場合を考えるのだが，φ あるいは $\neg\varphi$ が $(weak)$ の主論理式である場合は，その d_i の直部分導出木から $(weak)$ を有限回繰返すことによってもう片方の Δ ないしは Γ を導けるのでよい．よって以下では φ と $\neg\varphi$ はどちらも $(weak)$ の主論理式でないとしてよい．

φ の形に応じて場合分けして考える．

φ が原子論理式の場合：原子論理式を主論理式にできるのは (A) あるいは $(weak)$ である．(A) の場合ははじめに済ませてある．d_0 が最後の推論規則 $(weak)$ によって φ を出した場合は，d_0 の直部分導出木を d'_0 とすると $\vdash_{d'_0} \Gamma$ なので，この d'_0 から $(weak)$ を繰り返して Δ も出せばよい．d_1 が最後の推論規則 $(weak)$ によって $\neg\varphi$ を出した場合も同様である．

φ が $\varphi_0 \vee \varphi_1$ の場合[*82]：以下のように d'_0 を d_0 の，$d_{1,1}, d_{1,0}$ を d_1 の直部分導出木とする．

$$d_0 : (\vee)\ \dfrac{d'_0 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi_0, \varphi_1}}{\Gamma, \varphi_0 \vee \varphi_1} \qquad\qquad d_1 : (\wedge)\ \dfrac{d_{1,0} : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Delta, \neg\varphi_0} \qquad d_{1,1} : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Delta, \neg\varphi_1}}{\Delta, \neg\varphi_0 \wedge \neg\varphi_1}$$

このとき d'_0 と $d_{1,1}$ の対に帰納法の仮定を適用して $\vdash_{d_2} \Gamma, \Delta, \varphi_0$ かつ $\rho(d_2) \le |\varphi|$ を満たす d_2 を得る．次に $d_{1,0}$ から有限回 $(weak)$ を適用して $\vdash_{d_3} \Gamma, \Delta, \neg\varphi_0$ なる d_3 を得る．このとき次が求める導出木 d である．

[*82] この証明中の $(\neg)^l\varphi_i$ を $(\neg)^{l+1}\varphi_i$ に $(0 \le l \le 1)$，$\vee$ を $\wedge$ に置換したものは φ が $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ の場合の証明になっている．

$$\dfrac{d_2 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \varphi_0} \qquad d_3 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \neg\varphi_0}}{\Gamma, \Delta}\ d : (cut)$$

$|\varphi_0| < |\varphi|$ より $\rho(d) = \max\{|\varphi_0|+1, \rho(d_2), \rho(d_3)\} \le |\rho|$ となりカットランクの条件もよい.

φ が $\exists x\psi[x/a]$ の場合：以下のように d'_0 を d_0 の，d'_1 を d_1 の直部分導出木とする.

$$d_0 : (\exists)\ \dfrac{d'_0 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \psi[t/a]}}{\Gamma, \exists x\psi[x/a]} \qquad d_1 : (\forall)\ \dfrac{d'_1 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Delta, \neg\psi}}{\Delta, \forall x\neg\psi[x/a]}$$ ここで a は Δ に現われていない.

いま d'_1 について代入補題から次を満たす d''_1 がとれる.

$$\vdash_{d''_1} \Delta, \neg\psi[t/a]\ \&\ |d''_1| = |d'_1|\ \&\ \rho(d''_1) = \rho(d'_1)$$

よって d'_0 と d''_1 それぞれ適切に $(weak)$ を使い Δ，Γ を加えて (cut) を使えば求める導出木が得られる．カットランクの計算については φ が $\varphi_0 \vee \varphi_1$ の場合と同様である. □

定理 6.19 (カット除去定理)**.** $\vdash_d \Gamma$ のとき，カットを一切用いない Γ の導出木も存在する.

証明. $\vdash_d \Gamma\ \&\ 0 < \rho(d)$ のとき，$\vdash_{d'} \Gamma\ \&\ \rho(d') < \rho(d)$ なる d' も存在することを $|d| \in \omega$ による帰納法で示せば十分,

$|d| = 0$ のときは $\rho(d) = 0$ なので空虚な真．d の最後の推論が (cut) 以外なら帰納法の仮定から即座に従うので，最後の推論は (cut) だとして d_0, d_1 を直部分導出木とする.

$$\dfrac{d_0 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi} \qquad d_1 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \neg\varphi}}{\Gamma}\ d : (cut)$$

$\rho(d) = \max\{|\varphi|+1, \rho(d_0), \rho(d_1)\} > |\varphi|+1$ なら $\rho(d_0) > |\varphi|+1$ または $\rho(d_1) > |\varphi|+1$ であり，このときは帰納法の仮定を適用して再び (cut) を使えばカットランクが高々 $|\varphi|+1$ の Γ の導出木が得られる．$\rho(d) = |\varphi|+1$ の場合を考える．いま d_0 と d_1 に帰納法の仮定を適用し，d'_0, d'_1 で次を満たすものをとる.

$$\vdash_{d'_0} \Gamma, \varphi\ \&\ \rho(d'_0) \le |\varphi|\ \&\ \vdash_{d'_1} \Gamma, \neg\varphi\ \&\ \rho(d'_1) \le |\varphi|$$

このとき，還元補題から条件を満たす d がとれる. □

定義 6.20. 論理式 φ に対し，部分論理式への項の代入例全体の集合 $\mathrm{Sub}(\varphi)$ を論理式の構成に関する再帰で次にように定義する.

1. φ が原子論理式で，φ 中の自由変数が高々 $a_1, ..., a_n$ のみだとすると，
   $\mathrm{Sub}(\varphi) = \{\, \varphi[u_1/a_1][u_2/a_2]\cdots[u_n/a_n] \mid u_1, ..., u_n\text{は項}\,\}$,
   $\mathrm{Sub}(\neg\varphi) = \{\, \neg\varphi[u_1/a_1][u_2/a_2]\cdots[u_n/a_n] \mid u_1, ..., u_n\text{は項}\,\}$.

2. φ_0, φ_1 中の自由変数が高々 $b_1, ..., b_m$ だとすると，
$\mathrm{Sub}(\varphi_0 \vee \varphi_1) = \mathrm{Sub}(\varphi_0) \cup \mathrm{Sub}(\varphi_1) \cup \{ (\varphi_0 \vee \varphi_1)[u_1/b_1][u_2/b_2] \cdots [u_m/b_m] \mid u_1, ..., u_m$ は項 $\}$,
$\mathrm{Sub}(\varphi_0 \wedge \varphi_1) = \mathrm{Sub}(\varphi_0) \cup \mathrm{Sub}(\varphi_1) \cup \{ (\varphi_0 \wedge \varphi_1)[u_1/b_1][u_2/b_2] \cdots [u_m/b_m] \mid u_1, ..., u_m$ は項 $\}$,
$\mathrm{Sub}(\exists x \varphi_0[x/a]) = \mathrm{Sub}(\varphi_0) \cup \{ \exists x \varphi_0[x/a][u_1/b_1][u_2/b_2] \cdots [u_m/b_m] \mid u_1, ..., u_m$ は項 $\}$,
$\mathrm{Sub}(\forall x \varphi_0[x/a]) = \mathrm{Sub}(\varphi_0) \cup \{ \forall x \varphi_0[x/a][u_1/b_1][u_2/b_2] \cdots [u_m/b_m] \mid u_1, ..., u_m$ は項 $\}$.

系 6.21 (部分論理式性（subformula property）)**.** $\vdash_d \varphi$ のとき，$\mathrm{Sub}(\varphi)$ の要素からなる推件のみを用いた φ の導出木も存在する．

証明. φ のカット除去された導出木が条件を満たす． □

非論理公理

本稿では等号公理は PA や ZFC などの非論理公理と同等に扱い，Tait 計算の定義には含めない流儀を採用している．それゆえ，非論理公理と等号公理を考慮した標準的な証明可能関係は以下のように定める．

定義 6.22. L を一階の言語とする．L の等号公理 $\mathrm{Eq}(L)$ とは次の論理式からなる集合である．

1. $a = a$,
2. $a \neq b \vee b = a$,
3. $a \neq b \vee b \neq c \vee a = c$,
4. n 変数関数記号 $f \in \mathrm{L}$，n 変数関係記号 $R \in \mathrm{L}$ ごとに

$$a_1 \neq b_1 \vee a_2 \neq b_2 \vee \cdots \vee a_n \neq b_n \vee f(a_1, ..., a_n) = f(b_1, ..., b_n),$$

$$a_1 \neq b_1 \vee a_2 \neq b_2 \vee \cdots \vee a_n \neq b_n \vee \neg R(a_1, ..., a_n) \vee R(b_1, ..., b_n)$$

上記で a, b, c, a_i, b_i たちは自由変数，$a_i \neq b_i$ とは $\neg(a_i = b_i)$ の略記である．

T を L 論理式の集合とする．有限部分集合 $\Gamma \subseteq T \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L})$ と導出木 d で

$$\vdash_d \{ \neg\psi \mid \psi \in \Gamma \}, \varphi$$

を満たすものが存在するとき，φ は T から（Tait 計算によって）証明可能であると言い $T \vdash \varphi$ と表記する．

命題 6.23. 各 $\varphi \in T \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L})$ については $T \vdash \varphi$ が成り立つ．

証明. 例 6.10 から従う． □

補題 6.24 (遡及補題（inversion lemma）)**.**

$\vee$ の遡及　$\vdash_d \Gamma, \varphi_0 \vee \varphi_1$ のとき，以下を満たす導出木 d' が見つかる．

$$\vdash_{d'} \Gamma, \varphi_0, \varphi_1 \ \& \ |d'| \leq |d| \ \& \ \rho(d') \leq \rho(d),$$

$\wedge$ の遡及　$\vdash_d \Gamma, \varphi_0 \wedge \varphi_1$ のとき，以下を満たす導出木 d_0, d_1 が見つかる．

$$\vdash_{d_0} \Gamma, \varphi_0 \ \& \ |d_0| \leq |d| \ \& \ \rho(d_0) \leq \rho(d),$$
$$\vdash_{d_1} \Gamma, \varphi_1 \ \& \ |d_1| \leq |d| \ \& \ \rho(d_1) \leq \rho(d).$$

$\forall$ の遡及　$\vdash_d \Gamma, \forall x\varphi[x/a]$ のとき，以下を満たす導出木 d' が見つかる．

$$\vdash_{d'} \Gamma, \varphi \ \& \ |d'| \leq |d| \ \& \ \rho(d') \leq \rho(d),$$

証明. いずれも $|d| \in \omega$ による帰納法で同じように証明できる．ここでは $\forall$ の遡及のみを示す．$|d| = 0$ の場合は空虚な真．$\forall x\varphi[x/a]$ が d の最後の推論規則の主論理式の場合は直部分導出木が条件を満たすのでそうでない場合を考える．

d の最後の推論規則が $(weak), (\vee), (\wedge), (cut), (\exists)$ の場合はいずれも直部分導出木に帰納法の仮定を適用し，得られる導出木に再び同じ推論規則を使えばよい．最後の推論規則が $(\forall)$ の場合を考える．以下では Γ は $\Delta, \forall y\psi[y/b]$ である．

$$(\forall)\ \frac{\dfrac{\vdots}{\Delta, \forall x\varphi[x/a], \psi}}{\Delta, \forall x\varphi[x/a], \forall y\psi[y/b]}\ \text{ここで } b \text{ は } \Delta, \forall x\varphi[x/a] \text{ に現われていない．}$$

ここで d の直部分導出木を d_0 とし，c を新しい自由変数とすると補題 6.15 から $\vdash_{d_0[c/b]} \Delta, \forall x\varphi[x/a], \psi[c/b]$ が得られる[*83]．この導出木に帰納法の仮定を適用し，再び $(\forall)$ を使えばよい．導出木の高さやカットランクに関する条件は自明に満たされる．□

定理 6.25 (演繹定理)**.** $T + \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \to \psi$

証明. $(\Rightarrow)$ $T + \varphi \vdash \psi$ とする．このとき，ある $\Gamma \subseteq \{\neg\theta \mid \theta \in T \cup \{\varphi\}\}$ と d で $\vdash_d \Gamma, \psi$ となる．$\neg\varphi \in \Gamma$ なら $(\vee)$ で $\neg\varphi \vee \psi$ を導出すればよい．$\neg\varphi \notin \Gamma$ の場合も一度 $(weak)$ によって $\neg\varphi$ を出せば後は同様である．

$(\Leftarrow)$ $\vee$ の遡及から明らか．□

命題 6.26 (モーダス・ポーネンス)**.** $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \varphi \to \psi$ ならば $T \vdash \psi$

証明. 次を示せば十分．

$$\vdash_{d_0} \Gamma, \varphi \text{ かつ } \vdash_{d_1} \Delta, \neg\varphi \vee \psi \text{ならば} \vdash_d \Gamma, \Delta, \psi \text{を満たす } d \text{ が存在する．}$$

$\vee$ の遡及から $\vdash_{d_1'} \Delta, \psi, \neg\varphi$ なる d_1' が存在する．次が求める d である．

*83 d_0 に帰納法の仮定を適用できない理由は $b = a$ であって φ に a が含まれている場合にうまくいかないからである．

$$
d_0 : (*)\ \dfrac{\vdots}{\underline{\Gamma, \varphi}} \qquad d_1' : (*)\ \dfrac{\vdots}{\underline{\Delta, \psi, \neg\varphi}}
$$

$$
(cut)\ \dfrac{(weak)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \varphi} \qquad (weak)\ \dfrac{\vdots}{\Gamma, \Delta, \psi, \neg\varphi}}{\Gamma, \Delta, \psi}
$$

□

定義 6.27 (矛盾)**.** T を L 論理式の集合とする．ある $\Gamma \subseteq T \cup \mathrm{Eq}(\mathrm{L})$ と導出木 d で

$$
\vdash_d \{\, \neg\psi \mid \psi \in \Gamma \,\}
$$

を満たすものが存在するとき，T は矛盾するという．そうでないとき T は無矛盾という．

参考文献

[Boo93] George Boolos. *The Logic of Provability*. Cambridge University Press, Cambridge and New York, 1993.

[Fri75] Harvey M. Friedman. Some systems of second order arithmetic and their use. *Proc. of the I. C. M., Vancouver 1974*, Vol. 1, pp. 235–242, 1975.

[Goh23] Jun Le Goh. The strength of an axiom of finite choice for branches in trees. *The Journal of Symbolic Logic*, p. 1–20, 2023.

[Kay91] R. Kaye. *Models of Peano Arithmetic*. Oxford logic guides. Clarendon Press, 1991.

[Lee07] Chung Tong Lee. Note on cut-elimination. 2007.

[Mic21] Bärtschi Michael. ATR_0 *and Some Related Theories*. PhD thesis, University of Bern, 2021.

[Mon08] Antonio Montalbán. On the Π^1_1-separation principle. *Mathematical Logic Quarterly*, Vol. 54, No. 6, pp. 563–578, 2008.

[PW22] Fedor Pakhomov and James Walsh. Reducing ω-model reflection to iterated syntactic reflection, 2022.

[Rüe02] Christian Rüede. Transfinite dependent choice and ω-model reflection. *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 67, No. 3, pp. 1153–1168, 2002.

[Sac90] Gerald E. Sacks. *Higher Recursion Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1990.

[Sch77] Helmut Schwichtenberg. *Proof Theory: Some Applications of Cut-Elimination*, Vol. 90 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier, 1977.

[Sim09] Stephen G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2 edition, 2009.

[Wes77] R. A. Van Wesep. *Subsystems of second-order arithmetic and descriptive set theory under the axiom of determinateness*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1977.

[y.16] y. Gödel の不完全性定理. http://iso.2022.jp/math/TS2016/resume.pdf, 2016.

[菊池 14] 菊池誠. 不完全性定理. 共立出版, 2014.

[橋本 22a] 橋本航気. RCA_0 上で動作する turing functional を作る. https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/Turing_functional.pdf, 2022.

[橋本 22b] 橋本航気. ゲーデルの β 関数と，それによる記号の追加ついて. https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/genngonotuika2.pdf, 2022.

[新井 21] 新井敏康. 数学基礎論 増補版. 東京大学出版会, 2021.

[田中 97] 田中 一之. 鹿島 亮. 角田 法也. 菊池誠. 数学基礎論講義-不完全性定理とその発展. 日本評論社, 1997.

[田中 19] 田中一之. 数学基礎論序説：数の体系への論理的アプローチ. 裳華房, 2019.

[田中 22] 田中一之. 計算理論と数理論理学. 共立出版, 2022.