二階算術の論理式に対する冠頭標準形定理

橋本 航気

2022 年 10 月 16 日

概要

$L_2 = (+, \cdot, 0, 1, <, =, \in)$ 論理式の冠頭標準形定理を示す．またその応用として RCA_0 を含意する L_2 の再帰的理論は，$\forall x \exists \{x\}+$ 冠頭標準形の文の集合として再帰的に公理化可能であることを示す．

冠頭標準形定理やそれに至るまでのいくつかの命題に現れる"RCA_0"という仮定は，実際には集合のペアリングやシングルトンを作成できるくらいの力があれば十分である[*1].

本稿は Simpson [1] Theorem VIII.6.12 の証明の行間埋めの一環として書かれている．そのため冠頭標準形の定義はおそらく一般的でないものとなっている点に注意されたい．

目次

1 本稿での冠頭標準形の定義

定義 1.1. 本稿では次のいずれかの形の L_2 論理式を冠頭標準形と呼ぶ.

- $\forall X_1 \exists Y_1 \forall X_2 \exists Y_2 \cdots \forall X_k \exists Y_k \theta$ $(k \geq 1)$
- $\exists Y_1 \theta$
- θ

ただし θ は算術的論理式．便宜上本稿では一番上を意図した冠頭標準形とよぶ.

厳密に冠頭標準形という場合，算術的論理式部分も $\forall x_1 \exists y_1 \ldots$ の形であることを要求すべきだが,

[*1] 最後の系にあるように,

$$I\Delta_0 + \exists X(X = X) + \forall X_1 \exists Y_1 \forall X_2 \exists Y_2((Y_2)_0 = X_1 \wedge (Y_2)_1 = X_2) + \forall X \exists (X)_0 + \forall X \exists (X)_1 + \forall x \exists \{x\}$$

でよい.

簡単のためここでは省略する．また恣意的かもしれないが，$\forall X_1\theta$ や $\exists Y_1\forall X_2\exists Y_2\theta$ はここでは冠頭標準形とは認めないことにする．このような定義にする理由は，Simpson [1] Definition VIII.6.18 の fulfillment の定義との対応を取りたいためである．

本稿では次の形の冠頭標準形定理を示す．

定理 1.2 (冠頭標準形定理)**.** すべての L_2 論理式は意図した冠頭標準形論理式と RCA_0 上同値になる．

2 道具の準備

命題 2.1. $\theta(Y), \varphi$ を L_2 論理式とし，φ には Y は自由に現れないとする．

1. $\vdash [\varphi \to \forall Y\theta(Y)] \leftrightarrow \forall Y(\varphi \to \theta(Y))$
2. $\vdash [\varphi \land \exists Y\theta(Y)] \leftrightarrow \exists Y(\varphi \land \theta(Y))$
3. $\nvdash [\varphi \to \exists Y\theta(Y)] \leftrightarrow \exists Y(\varphi \to \theta(Y))$
4. $\mathrm{RCA}_0 \vdash [\varphi \to \exists Y\theta(Y)] \leftrightarrow \exists Y(\varphi \to \theta(Y))$
5. $\mathrm{RCA}_0 \vdash [\varphi \land \forall Y\theta(Y)] \leftrightarrow \forall Y(\varphi \land \theta(Y))$

以降は上からすぐにでる．

a. $\vdash [\varphi \lor \forall Y\theta(Y)] \leftrightarrow \forall Y(\varphi \lor \theta(Y))$

b. $\mathrm{RCA}_0 \vdash [\varphi \lor \exists Y\theta(Y)] \leftrightarrow \exists Y(\varphi \lor \theta(Y))$

証明. 1. $(\to)$ Y を任意にとる．φ だとすると，仮定から $\theta(Y)$．$(\leftarrow)$ φ だとする．任意に Y をとると，仮定から $\theta(Y)$ なのでよい．2. 自明．

3. 二領域論理の定義に戻る必要がある．2 は正確には次である．以下で $S(*)$ は一変数関係記号*2．

$$\nvdash [\varphi \to \exists Y(S(Y) \land \theta(Y))] \leftrightarrow \exists Y(S(Y) \land (\varphi \to \theta(Y)))$$

$(\to)$ 成り立たない．φ を $0 = 1$ とし，二階部分が空であるような構造を考えればよい．

4. $(\to)$ $\neg\varphi$ なら $Y = \{0\}$ でよい． φ のときは仮定からとれる．$(\leftarrow)$ φ とする．仮定からとれる Y でよい．

5.

$$\begin{aligned}
\neg[\varphi \land \forall Y\theta(Y)] &\leftrightarrow \varphi \to \exists Y\neg\theta(Y) \\
&\leftrightarrow \exists Y(\varphi \to \neg\theta(Y)) && (\because 4) \\
&\leftrightarrow \exists Y\neg(\varphi \land \theta(Y)) \\
&\leftrightarrow \neg\forall Y(\varphi \land \theta(Y))
\end{aligned}$$

□

*2 ” それは集合である” を意図したものである．

上は数量化についても同様のことが言える．

命題 2.2. $\theta(Y), \psi(y), \varphi$ を L_2 論理式とし，φ には Y, y が自由に現れないとする．RCA_0 上で次が正しい．

$$\begin{array}{cc}
[\varphi \to \forall Y \theta(Y)] \leftrightarrow \forall Y(\varphi \to \theta(Y)) & [\varphi \to \forall y \theta(y)] \leftrightarrow \forall y(\varphi \to \theta(y)) \\
[\varphi \to \exists Y \theta(Y)] \leftrightarrow \exists Y(\varphi \to \theta(Y)) & [\varphi \to \exists y \theta(y)] \leftrightarrow \exists y(\varphi \to \theta(y)) \\
[\varphi \land \forall Y \theta(Y)] \leftrightarrow \forall Y(\varphi \land \theta(Y)) & [\varphi \land \forall y \theta(y)] \leftrightarrow \forall y(\varphi \land \theta(y)) \\
[\varphi \land \exists Y \theta(Y)] \leftrightarrow \exists Y(\varphi \land \theta(Y)) & [\varphi \land \exists y \theta(y)] \leftrightarrow \exists y(\varphi \land \theta(y)) \\
[\varphi \lor \forall Y \theta(Y)] \leftrightarrow \forall Y(\varphi \lor \theta(Y)) & [\varphi \lor \forall y \theta(y)] \leftrightarrow \forall y(\varphi \lor \theta(y)) \\
[\varphi \lor \exists Y \theta(Y)] \leftrightarrow \exists Y(\varphi \lor \theta(Y)) & [\varphi \lor \exists y \theta(y)] \leftrightarrow \exists y(\varphi \lor \theta(y))
\end{array}$$

命題 2.3. φ を L_2 論理式とする．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x \exists Y \varphi(x, Y) \leftrightarrow \forall X \exists Y[\exists! x(x \in X) \to \forall x(x \in X \to \varphi(x, Y))]$$

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \exists x \forall Y \varphi(x, Y) \leftrightarrow \exists X \forall Y[\exists! x(x \in X) \land \neg \forall x(x \in X \to \varphi(x, Y))]$$

証明. 一つ目を示せば十分（二つ目は両方否定をとったもの）．

$(\to)$ X を任意にとる．もし X がシングルトンでないなら，$Y = \varnothing$ でよい．シングルトンなら，その x を取り出して，仮定から Y をとる．$(\leftarrow)$ x を任意にとる．$X = \{x\}$ について仮定を適用して得られる Y が条件を満たす． □

例 2.4. $\varphi \equiv \forall X_1 \exists Y_1 \theta$ について適用すると，RCA_0 上次が正しい．

$$\begin{aligned}
\forall x \exists Y \varphi &\leftrightarrow \forall x \exists Y \forall X_1 \exists Y_1 \theta \\
&\leftrightarrow \forall X \exists Y[\exists! x(x \in X) \to \forall x(x \in X \to \forall X_1 \exists Y_1 \theta)] && \text{(命題 2.3)} \\
&\leftrightarrow \forall X \exists Y[\exists! x(x \in X) \to \forall x \forall X_1(x \in X \to \exists Y_1 \theta)] && \text{(命題 2.2)} \\
&\leftrightarrow \forall X \exists Y[\exists! y(y \in X) \to \forall x \forall X_1 \exists Y_1(x \in X \to \theta)] && \text{(命題 2.2)} \\
&\leftrightarrow \forall X \exists Y \forall X_1 \forall x[\exists! y(y \in X) \to \exists Y_1(x \in X \to \theta)] && \text{(命題 2.2)} \\
&\leftrightarrow \forall X \exists Y \forall X_1 \forall x \exists Y_1[\exists! y(y \in X) \to (x \in X \to \theta)] && \text{(命題 2.2)}
\end{aligned}$$

$\forall x \exists Y_1[\exists! y(y \in X) \to (x \in X \to \theta)]$ にも命題 2.3 を適用して，上と同様の変形をする．

$$\begin{aligned}
&\forall x \exists Y_1[\exists! y(y \in X) \to (x \in X \to \theta)] \\
&\leftrightarrow \forall W \exists Y_1[\exists! z(z \in W) \to \forall x[x \in W \to [\exists! y(y \in X) \to (x \in X \to \theta))]]
\end{aligned}$$

したがって RCA_0 上次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\forall x \exists Y \forall X_1 \exists Y_1 \theta &\leftrightarrow \forall X \exists Y \forall X_1 \forall W \exists Y_1[\exists! z(z \in W) \to \forall x[x \in W \to [\exists! y(y \in X) \to (x \in X \to \theta))] \\
&\leftrightarrow \forall X \exists Y \forall X_1 \forall W \exists Y_1 \forall x[\exists! z(z \in W) \to [x \in W \to [\exists! y(y \in X) \to (x \in X \to \theta))]
\end{aligned}$$

また，RCA_0 では集合のペアリングができるので $\forall X_1 \forall W\ldots$ は一つにまとめることができる．たとえば一般に $\forall X \forall Y \theta(X,Y) \leftrightarrow \forall Z \theta((Z)_0,(Z_1))$ が言える*3．ただし，右側の論理式は略記であり，正確には θ における $t \in X$ を $(t,0) \in Z$ に*4，$t \in Y$ を $(t,1) \in Z$ に変換した論理式 θ' を考えている．つまり正確には $\forall X \forall Y \theta(X,Y) \leftrightarrow \forall Z \theta'(Z)$ ということである．

補題 2.5. 任意の冠頭標準形論理式 φ に対して，意図した冠頭標準形論理式 ψ で次を満たすものが存在する．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash (\forall x \varphi) \leftrightarrow \psi$$

証明. φ の構成に関する帰納法．φ が算術論理式なら自明．Σ^1_1 の場合も命題 2.3 で見た．φ が $\forall X_1 \exists Y_1 \theta$ （θ は算術論理式）の形なら $\forall x \forall X_1 \exists Y_1 \theta \leftrightarrow \forall X_1 \forall x \exists Y_1 \theta$ となり，命題 2.3 と集合のペアリングからよい．$\varphi \equiv \forall Z \exists Y \forall X_1 \exists Y_1 \cdots \forall X_k \exists Y_k \theta$ $(k \geq 1)$ だとする．$k=1$ なら例 2.4 そのものである．$k \geq 2$ とする．このとき，

$$\forall x \varphi \leftrightarrow \forall Z \forall x \exists Y \forall X_1 \exists Y_1 \cdots \forall X_k \exists Y_k \theta$$

となり，$\forall x \exists Y \forall X_1 \exists Y_1 \cdots \forall X_k \exists Y_k \theta$ の部分は例 2.4 で見たように，ある算術論理式 θ' で次と同値．

$$\forall X \exists Y \forall X_1 \forall W \exists Y_1 \forall x [\exists! z(z \in W) \to [x \in W \to [\exists! y(y \in X) \to (x \in X \to [\forall X_2 \exists Y_2 \cdots \forall X_k \exists Y_k \theta'])]]$$

ここで命題 2.2 によって次の形と同値．

$$\forall X \exists Y \forall X_1 \forall W \exists Y_1 \forall x \underline{\forall X_2 \exists Y_2 \cdots \forall X_k \exists Y_k [\exists! z(z \in W) \to [x \in W \to [\exists! y(y \in X) \to (x \in X \to \theta'))]}$$

最後に下線を引いた論理式に帰納法の仮定を適用し，先頭の $\forall Z \forall X$ と $\forall X_1 \forall W$ の二か所をペアリングで一つにすればよい． □

3 定理の証明

冠頭標準形定理 1.2 の証明．論理式の構成に関する帰納法で示す．

ベースケースとしては算術論理式なのだが，これは前に $\forall X \exists Y$ をつけるだけでよい．

Case 1. $\varphi = \psi * \sigma$，$*$ が $\wedge$ *or* $\vee$ *or* $\to$ のとき．

まず ψ と σ に定理を適用して意図した冠頭標準形論理式を得る．あとは命題 2.2 を適用すればよい*5．

Case 2. $\varphi = \neg \psi$ のとき．

ψ に定理を適用して意図した冠頭標準形論理式を得た後で $\neg$ を中に押し込み，先頭に $\forall X$ を，算術論理式の前に $\exists Y$ をダミーとして付ければよい．

---

*3 $(Z)_i = \{\, n \mid (n,i) \in Z \,\}$

*4 $(i,j) = (i+j)^2 + i$

*5 量化の範囲は適当になんとかする．

Case 3. $\varphi = \forall X\psi$ のとき．

ψ に定理を適用して，前に現れる $\forall X \forall X_1 \cdots$ をペアリングでまとめればよい．

Case 4. $\varphi = \exists Y\psi$ のとき．

ψ に定理を適用して，前にダミーとして $\forall X$ をくっつければよい．

Case 5. $\varphi = \forall x\psi$ のとき．

ψ に定理を適用したのち補題 2.5 を適用する．

Case 6. $\varphi = \exists x\psi$ のとき．

$\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\psi$ なので $\neg\psi$ を Case2 に投げて補題 2.5 を適用したのち，再び前と後ろにダミー集合量化をつければよい．（$\exists$ を略記とみなせば必要ない議論ではある．）

□

さて，本稿で与えた冠頭標準形定理の証明を見れば，論理式の書き換えは決まった手続きで再帰的に行われているので，ゲーデル数化を適当に固定すれば計算可能関数として書ける．そしてその手続きにおいて，冠頭標準形に変形した後で算術的論理式部分に $\wedge(0=0)$ を与えられた論理式の長さ分だけ挿入するという操作を加える．こうすれば，元の論理式よりも，冠頭標準形に直した後の論理式のほうが長いことを保証できる．そこで定理の系として次が得られる．

系 3.1. T は RCA_0 を含意する L_2 の再帰的理論とする[*6]．このとき，$T \vdash S$ かつ $S + \forall x \exists \{x\} \vdash T$ であって，すべての文が冠頭標準形である再帰的理論 S が存在する．

証明． この系の前までの議論はすべて以下のもとで正しい．

$$I\Delta_0 + \exists X(X = X) + \forall X_1 \exists Y_1 \forall X_2 \exists Y_2((Y_2)_0 = X_1 \wedge (Y_2)_1 = X_2) + \forall X \exists (X)_0 + \forall X \exists (X)_1 + \forall x \exists \{x\}$$

上の理論の $\forall\exists\{x\}$ 以外を B と表記する．B に含まれる文は冠頭標準形であり，もちろん $\mathrm{RCA}_0 \vdash \mathrm{B}$ である．関数 $F : \mathrm{L}_2\text{論理式} \to \mathrm{L}_2\text{論理式}$ を定理 1.2 によって得られる意図した冠頭標準形への変形操作とする．[*7]

$$S := \{\, F(\varphi) \mid \varphi \in T \,\} \cup \mathrm{B}$$

が条件を満たすことを示す．$\{\, F(\varphi) \mid \varphi \in T \,\}$ が再帰的集合であることをまず示す．操作 F は全域的再帰的である[*8]ので，与えられた論理式 φ が S に入っているか否かは次のようにして分かる．

φ からまずその長さ l を取得する．F は長さを増やすと仮定してよいので，T の論理式の中で長さが l 以下のものを F で飛ばして一つ一つ φ と合致するか調べればよい．

[*6] もちろん T も $\mathrm{B} + \forall x \exists \{x\}$ でよい．

[*7] 厳密には，この証明では適当なゲーデル数化「$\ulcorner * \urcorner ; \mathrm{L}_2\text{論理式} \to \omega$」を固定して自然数の話をしている．

[*8] 論理式以外のゲーデル数を入力として受け取った場合は適当な値をとると定義しておく．与えられた自然数が論理式のゲーデル数か否かの判定は再帰的に行えることに注意．

次に S と T が同値であることを示す．まず $T \vdash S$ は T が RCA_0 を含意することから明らか．逆も，各 $\varphi \in T$ について $S + \forall x \exists \{x\} \vdash \varphi \leftrightarrow F(\varphi)$ なのでよい．

□

参考文献

[1] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.