# 形式的体系内部における素朴集合論と有限ラムゼーの定理のコード化，およびその PA からの証明可能性

橋本航気

2022 年 2 月 22 日

**概要**

有限ラムゼーの定理を一階算術の言語でコード化するために $I\Sigma_1$ で素朴集合論を展開する．その後厳密に有限ラムゼーの定理のコード化を与え，それが $PA$ で証明できることを確認する．

## 目次



## 1 前提知識

Kaye [1] の 2 章，3.1 節，4 章（もしくは筆者の言語の追加 pdf[*1] ），5 章，9.1 節を既に読んでいる読者を想定していが，主として $I\Sigma_1$ で有限列をコードするための関数（ゲーデルの $\beta$ 関数など）が使えることを知っていれば十分である．

## 2 $I\Sigma_1$ 内部における素朴集合論と有限ラムゼーの定理の形式化

ラムゼー型命題はいずれも「任意の関数について，ある濃度の集合が存在して...」というものであり，集合のための変数を持たない一階算術ではどちらもこのままではコード化（= $\mathscr{L}_A$ 文で書くこと）が難しい．そのため，関数や集合はそのコードで代用するのである．ここでは関数や集合のコードに関する素朴集合論を $I\Sigma_1$ で展開し，有限ラムゼーの定理を $\mathscr{L}_A$ 文として書き表すことを目指す．

[*1] https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/genngonotuika.pdf

便宜上，以降では $H, X, Y, Z$ など大文字アルファベットも $x, y, u, v$ などと同様に「一階の」変数記号として使用する．また https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/satdelta0.pdf で定義した関数や関係を再利用するため，以降で使用するものはまとめて再掲しておく．

$$
\begin{aligned}
&\text{（長さ）} \operatorname{len}(x) = y \leftrightarrow (x)_0 = y \\
&\text{（デコード）} [x]_y = z \leftrightarrow (y \geq \operatorname{len}(x) \wedge z = 0) \vee (y < \operatorname{len}(x) \wedge (x)_{y+1} = z) \\
&\text{（有限長さ配列）} [x_0, x_1, ..., x_{n-1}] = \min \left\{ z \mid \operatorname{len}(z) = n \wedge \bigwedge_{i<n} ([z]_i = x_i) \right\} \\
&\text{（長さ 0 配列）} [] = \min \{ z \mid \operatorname{len}(z) = 0 \} \\
&\text{（連結）} x^\frown y = \min \left\{ z \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{len}(z) = \operatorname{len}(x) + \operatorname{len}(y) \wedge \\ \forall i < \operatorname{len}(x)([z]_i = [x]_i) \wedge \forall j < \operatorname{len}(y)([z]_{\operatorname{len}(x)+j} = [y]_j) \end{array} \right\} \\
&\text{（制限）} x \restriction y = \min \{ w \mid \operatorname{len}(w) = y \wedge \forall i < \operatorname{len}(w)([w]_i = [x]_i) \} \\
&\text{（置換）} x[y/z] = \min \left\{ w \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{len}(w) = \max(\operatorname{len}(x), z+1) \wedge \\ \forall i < \operatorname{len}(w)\{(i = z \to [w]_i = y) \wedge (i \neq z \to [w]_i = [x]_i)\} \end{array} \right\} \\
&\text{（コードの所属）} x \in_c s \leftrightarrow \exists i < \operatorname{len}(s) x = [s]_i
\end{aligned}
$$

**定義 2.1** (コードの最大・最小)**.**

$$
\begin{aligned}
\max{}_c(X) = z &\leftrightarrow (\operatorname{len}(X) = 0 \to z = 0) \wedge (\operatorname{len}(X) > 0 \to z \in_c X \wedge \forall x \in_c X(x \leq z)) \\
\min{}_c(X) = z &\leftrightarrow (\operatorname{len}(X) = 0 \to z = 0) \wedge (\operatorname{len}(X) > 0 \to z \in_c X \wedge \forall x \in_c X(z \leq x))
\end{aligned}
$$

$m \mapsto [0, 1, \ldots, m-1]$ なる関数 $\operatorname{Set}(m)$ は以下で定義できる．

**定義 2.2.** $\operatorname{Set}(m) = \min \{ c \mid \operatorname{len}(c) = m \wedge \forall i < \operatorname{len}(c)([c]_i = i) \}$

より一般的な区間は以下のように定義できる．

**定義 2.3.**

$$
[x, y] = \begin{cases} \min \{ z \mid \operatorname{len}(z) = y - x + 1 \wedge \forall i < \operatorname{len}(z)([z]_i = x + i) \} & \text{if } x \leq y \\ [] & \text{otherwise} \end{cases}
$$

$\operatorname{Set}(m) = [0, m-1] (m \geq 1)$ が成り立つ．

$\forall x, i((x)_i \leq x)$ より $I\Sigma_1 \vdash \forall x, c(x \in_c c \to x \leq c)$ であるから，$\in_c$ による有界量化をそれぞれ次のように略記として導入するが，論理式の階層に影響は生じない．

| 略記 | 正式 |
|---|---|
| $\forall x \in_c y \theta(x, y, \overline{z})$ | $\forall x \leq y(x \in_c y \to \theta(x, y, \overline{z}))$ |
| $\exists x \in_c y \theta(x, y, \overline{z})$ | $\exists x \leq y(x \in_c y \wedge \theta(x, y, \overline{z}))$ |

次にコードする対象が単調増加列のときに正しく部分列を表現できる関係 $x \subseteq_i y$ を導入したい．つまり，$[2, 7, 11] \subseteq_i [2, 3, 5, 7, 11, 13]$ のような状況を表現する関係である．この具体例を観察する

と，$[2,7,11]$ は $[2,3,5,7,11,13]$ の $0+1$ 番目の元，$3+1$ 番目の元，$4+1$ 番目の元のように，単調に増加する数列 $0,3,4$ が出てくることが見て取れる．このアイデアを元に $\subseteq_i$ を定義する．

**定義 2.4.**

$$
\begin{aligned}
X \subseteq_i Y \leftrightarrow X = [\,] \vee [&\forall i \leq \mathrm{len}(Y)-1 \forall j < i([Y]_j < [Y]_i) \wedge [X]_0 \in_c Y \\
&\wedge \forall i < \mathrm{len}(X)-1[\mathrm{Index}([X]_i, Y) < \mathrm{Index}([X]_{i+1}, Y) \leq \mathrm{len}(Y)-1] \\
&\wedge \underbrace{\forall w < X(\mathrm{len}(w) \neq \mathrm{len}(X) \vee \exists i < \mathrm{len}(X)[X]_i \neq [w]_i))}_{X \text{ の最小性}}]
\end{aligned}
$$

ただしここで $\mathrm{Index}(x,c)$ は次で定義される関数である．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Index}(x,c) = i \leftrightarrow &(x \in_c c \to [c]_i = x \wedge \forall j < i[c]_j \neq x) \wedge \\
&(x \notin_c c \to i = \mathrm{len}(c))
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Index}(x,c)$ は $c$ にいて $x$ が何番目に入っているかを返す関数である．もし $x$ が $c$ に入っていなければ $c$ の長さを返す．この関数は明らかに $PA$ 上可証再帰的であるので，$X \subseteq_i Y$ は $\Delta_1(PA)$ になる．この $X \subseteq_i Y$ による量化も $x \in_c y$ や kaye [1]9.1 節の $x \subseteq_p y$ と同様に有界量化と見なせることを確認する．

**系 2.5.** 次を満たす $I\Sigma_1$ 上可証再帰的な関数 $F'(u,y)$ が存在する．

$$
\begin{aligned}
I\Sigma_1 \vdash \forall c, u, y[&\mathrm{len}(c) \leq y \wedge \forall i < \mathrm{len}(c)([c]_i \leq u) \\
&\to \exists c' \leq F'(u,y)(\mathrm{len}(c') = \mathrm{len}(c) \wedge \forall i < \mathrm{len}(c)([c']_i = [c]_i))]
\end{aligned}
$$

**証明.** $F'(u,y) = F(\max(u,y), y+1)$ が条件を満たす．ただしここで $F$ は https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/genngonotuika2.pdf 最後の系のものである．実際，$\mathrm{len}(c) \leq y \wedge \forall i < \mathrm{len}(c)([c]_i \leq u)$ とすると $\mathrm{len}(c) = (c)_0 \leq y$ であり，$(c)_{i+1} = [c]_i$ であることを思い出せば $1 \leq i \leq (c)_0 (= \mathrm{len}(c))$ なる $i$ については $(c)_i \leq u$ であるので

$$\forall i < \mathrm{len}(c)+1((c)_i \leq \max(u,y))$$

となっている．したがって $F(\max(u,y), \mathrm{len}(c)+1)$ 以下の $c'$ で

$$\forall i < \mathrm{len}(c)+1((c')_i = (c)_i)$$

を満たすものが存在する．この $c'$ は

- $\mathrm{len}(c') = (c')_0 = (c)_0 = \mathrm{len}(c)$
- $\forall i < \mathrm{len}(c)([c']_i = (c')_{i+1} = (c)_{i+1} = [c]_i)$

となっている．いま $\mathrm{len}(c) \leq y$ であるから

$$c' \leq F(\max(u,y), \mathrm{len}(c)+1) \leq F(\max(u,y), y+1) = F'(u,y)$$

となり結論を得る． $\square$

**命題 2.6.** 各 $n \geq 1$ に対して，$\Sigma_n(I\Sigma_n)$ と $\Pi_n(I\Sigma_n)$ は以下の量化に閉じる

$$\forall x(x \subseteq_i y \to \cdots), \quad \exists x(x \subseteq_i y \land \cdots)$$

**証明.** 以下 $F'$ とは系 2.5 のものであるとする．$x \subseteq_i y \to x \leq F'(\max_c(y), \mathrm{len}(y))$ に注意すれば

$$\forall x(x \subseteq_i y \to \cdots) \equiv \forall x \leq F'(\max_c(y), \mathrm{len}(y))(x \subseteq_i y \to \cdots)$$
$$\exists x(x \subseteq_i y \land \cdots) \equiv \exists x \leq F'(\max_c(y), \mathrm{len}(y))(x \subseteq_i y \land \cdots)$$

であり，$x \subseteq_i y$ は $\Delta_1(I\Sigma_1)$ であるのでよい． □

**命題 2.7.** $I\Sigma_1$ において以下が証明可能である．

(1) $\forall X, Y(X \subseteq_i Y \to \forall a(a \in_c X \to a \in_c Y))$
(2) $\forall X, Y, Z(X \subseteq_i Y \land Y \subseteq_i Z \to X \subseteq_i Z)$
(3) $\forall X, Y(X \subseteq_i Y \land Y \subseteq_i X \to X = Y)$

**証明.** (1) $[] \neq X \subseteq_i Y$ とすると定義から $\forall i < \mathrm{len}(X)(\mathrm{Index}([X]_i, Y) \leq \mathrm{len}(Y) - 1)$ であり，これは $\forall i < \mathrm{len}(X)([X]_i \in_c Y)$ を意味する．

(2) (1) から明らか．

(3) $[] \neq X \subseteq_i Y \land Y \subseteq_i X$ と仮定する．まず (1) から

$$\forall a(a \in_c X \leftrightarrow a \in_c Y) \tag{2.1}$$

が成り立つことに留意せよ．このとき定義から示すべきは次の二点である．

- $\mathrm{len}(X) = \mathrm{len}(Y)$
- $\forall i < \mathrm{len}(X)([X]_i = [Y]_i)$

いずれも $\forall i([X]_i = [Y]_i)$ を $i$ に関する帰納法で示せば十分．$[X]_0 < [Y]_0$ だとすると，$[X]_0 \in_c Y$ なのである $j < \mathrm{len}(Y)$ で $[X]_0 = [Y]_j < [Y]_0$ となるが，そのような $j$ は存在しない．よって $[X]_0 = [Y]_0$．$[X]_i = [Y]_i \neq 0$ だとすると，$[X]_{i+1}$ は $0$ か $\forall j < i+1([X]_j < [X]_{i+1})$ であり，$Y$ についても同様である．$X, Y$ の一方のみが $0$ であることは式 (2.1) に反する．したがってどちらも $0$ でない，つまり $\forall j < i+1([X]_j < [X]_{i+1} \land [Y]_j < [Y]_{i+1})$ と仮定してよい．もし仮に $[X]_{i+1} < [Y]_{i+1}$ だとすると

$$[Y]_i = [X]_i < [X]_{i+1} < [Y]_{i+1}$$

となり，$[X]_{i+1} \notin_c Y$ が導かれて式 (2.1) に矛盾する．ゆえに $[X]_{i+1} = [Y]_{i+1}$ が成り立つ． □

(1) の逆は成り立たない．例えば $\forall a(a \in_c [1, 1, 2] \to a \in_c [1, 2])$ が反例である．

$X, Y$ がどちらも $\mathrm{Set}(m)$ に $\subseteq_i$ で含まれているなら命題 2.7 において (1) の逆が成り立つ．

**命題 2.8.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X, Y, m(X \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \land Y \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \land \forall a(a \in_c X \to a \in_c Y) \to X \subseteq_i Y)$

**証明.** $m, X, Y$ を $X \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \wedge Y \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \wedge \forall a(a \in_c X \to a \in_c Y)$ を満たすように任意に取る．このとき $X, Y$ は両方重複がなく昇順に並んでいる（$i < j < \mathrm{len}(X) \to [X]_i < [X]_j$）．したがって明らかに

$$\forall i < \mathrm{len}(X) - 1[\mathrm{Index}([X]_i, Y) < \mathrm{Index}([X]_{i+1}, y) \leq \mathrm{len}(Y) - 1]$$

が成り立ち，$X$ の最小性の条件も $X \subseteq_i \mathrm{Set}(m)$ から成り立つ．ゆえに $X \subseteq_i Y$ が分かる． □

**系 2.9.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X, Y, m(X \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \wedge Y \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \wedge \forall a(a \in_c X \leftrightarrow a \in_c Y) \to X = Y)$

**定理 2.10** ($\Delta_1$ 有界集合コードの生成)**.** $\varphi(x, \overline{y}, z)$ を $\mathscr{L}_A$ の $\Delta_1(I\Sigma_1)$ 論理式とする．このとき以下が成り立つ．

$$I\Sigma_1 \vdash \forall \overline{y}, z \exists! X \subseteq_i \mathrm{Set}(z)[\forall x < z(x \in_c X \leftrightarrow \varphi(x, \overline{y}, z))]$$

**証明.** $\overline{y}, z$ は任意にとって固定しておく．自明な場合を除くために $z \geq 1$ としてよい．

存在:

次を $l$ の $z$ までの帰納法で示す．

$$\forall l \leq z \exists X \subseteq_i \mathrm{Set}(l)(\forall x < l(x \in_c X \leftrightarrow \varphi(x, \overline{y}, z)))$$

$l = 0$ は明らか．$l = 1$ なら

$$X := \begin{cases} [0] & \text{if } \varphi(0, \overline{y}, z) \text{ が成り立つ.} \\ [] & \text{if } \varphi(0, \overline{y}, z) \text{ が成り立たない.} \end{cases}$$

と定めた $X$ が条件を満たす．よって $1 \leq l < z$ で成り立つと仮定し，$l + 1$ の場合を考える．帰納法の仮定から以下を満たす $X$ がとれる．

$$X \subseteq_i \mathrm{Set}(l) \wedge (\forall x < l(x \in_c X \leftrightarrow \varphi(x, \overline{y}, z)))$$

このときも同様に

$$X' := \begin{cases} X^\frown[l] & \text{if } \varphi(l, \overline{y}, z) \text{ が成り立つ.} \\ X & \text{if } \varphi(l, \overline{y}, z) \text{ が成り立たない.} \end{cases}$$

と定めた $X'$ が条件を満たす．

一意性:

$X, Y$ が以下を満たしたとする．

$$X \subseteq_i \mathrm{Set}(z)[\forall x < z(x \in_c X \leftrightarrow \varphi(x, \overline{y}, z))] \wedge Y \subseteq_i \mathrm{Set}(z)[\forall x < z(x \in_c Y \leftrightarrow \varphi(x, \overline{y}, z))]$$

まず $X, Y \subseteq_i \mathrm{Set}(z)$ から $X, Y$ どちらも $z$ 以上の元を持たず，さらに

$$\forall x < z(x \in_c X \leftrightarrow \varphi(x, \overline{y}, z) \leftrightarrow x \in_c Y)$$

が成り立つので

$$\forall x(x \in_c X \leftrightarrow x \in_c Y)$$

となる．したがって系 2.9 から $X = Y$ が結論できる． □

**系 2.11.** $\varphi(x,\overline{y},c,z,j)$ を $\mathscr{L}_A$ の $\Delta_1(I\Sigma_1)$ 論理式とする．このとき以下が成り立つ．

$$I\Sigma_1 \vdash \forall \overline{y},c,z \exists P[\mathrm{len}(P)=c \land \forall j<c([P]_j \subseteq_i \mathrm{Set}(z) \land (\forall x<z(x\in_c [P]_j \leftrightarrow \varphi(x,\overline{y},c,z,j))]$$

**証明.** $\overline{y},c,z$ を任意にとって固定する．自明な場合を除くために $c,z\geq 1$ としてよい．定理 2.10 を利用して以下を $l$ の $c$ までの帰納法で示せばよい．

$$\exists P[\mathrm{len}(P)=l \land \forall j<l([P]_j \subseteq_i \mathrm{Set}(z) \land (\forall x<z(x\in_c [P]_j \leftrightarrow \varphi(x,\overline{y},c,z,j))]$$

□

**定義 2.12.** 3 変数関係 $f\colon {}_cX\to Y$ を以下とする．

$$\forall x\in_c X([f]_x \in_c Y)$$

**例 2.13.** $X=[1,4,6,4], Y=[7,8]$ とすると，例えば以下の $f$ が $f\colon {}_cX\to Y$ を満たす．

$$f=[0,7,0,0,8,0,7]$$

以降では $f\colon {}_cX\to Y$ と $x\in_c X$ について $[f]_x$ を通常の関数のように $f(x)$ と表記する．

**定義 2.14** (単射・全射・全単射のコード)**.** 以下のように 3 項関係を三つ定める．

$$\begin{aligned}
&f\colon {}_cX \overset{1to1}{\to} Y \leftrightarrow f\colon {}_cX\to Y \land \forall x,x'\in_c X(f(x)=f(x')\to x=x')\\
&f\colon {}_cX \overset{onto}{\to} Y \leftrightarrow f\colon {}_cX\to Y \land \forall y\in_c Y\exists x\in_c X f(x)=y\\
&f\colon {}_cX \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} Y \leftrightarrow f\colon {}_cX \overset{1to1}{\to} Y \land f\colon {}_cX \overset{onto}{\to} Y
\end{aligned}$$

上から順に，それぞれ $f$ が単射である，全射である，全単射であるという．

**命題 2.15.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X,Y,f([f\colon {}_cX\to Y]\leftrightarrow [f\colon {}_cX\restriction \mathrm{len}(X)\to Y])$

**証明.** $\forall x(x\in_c X\leftrightarrow x\in_c X\restriction\mathrm{len}(X))$ から明らか． □

**定理 2.16** ($\Sigma_1$ 関数コードの生成)**.** $\varphi(x,X,y,Y,\overline{z})$ を $\mathscr{L}_A$ の $\Sigma_1$ 論理式とする．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
I\Sigma_1 \vdash &\forall X,Y,\overline{z}(\forall x\in_c X\exists! y\in_c Y\varphi(x,X,y,Y,\overline{z})\\
&\quad \to \exists f(f\colon {}_cX\to Y\land \forall x\in_c X\varphi(x,X,f(x),Y,\overline{z})))
\end{aligned}$$

**証明.** $X,Y,z$ を任意にとって固定し，$\forall x\in_c X\exists! y\in_c Y\varphi(x,X,y,Y,\overline{z})$ と仮定する．$\mathrm{len}(X)=0$ なら $f=[]$ が条件を満たす．よって以降では $\mathrm{len}(X)>0$ としてよい．以下を $l$ の $\mathrm{len}(X)$ までの帰納法で示す．

$$\forall l\leq \mathrm{len}(X)\exists f[f\colon {}_cX\restriction l\to Y\land \forall x\in_c X\restriction l\varphi(x,X,f(x),Y,\overline{z})]$$

$l=0$ なら $f=[]$ でよいので $l=1$ の場合を考える．$[X]_0$ について $\varphi([X]_0,X,y,Y,\overline{z})$ を満たすただひとつの $y\in_c Y$ をとれば，$f=\mathrm{zeros}([X]_0)^\frown[y]$ が条件を満たす．ただしここで $\mathrm{zeros}([X]_0)$ とは以下で定義される関数 $\mathrm{zeros}(s)$ の引数に $[X]_0$ を与えた結果である．

$$\begin{cases}\mathrm{zeros}(0) & =[] \\ \mathrm{zeros}(s+1) & =\mathrm{zeros}(s)^\frown[0]\end{cases}$$

次に $l<\mathrm{len}(X)$ について以下を満たす $f$ がとれたとする．

$$f\colon {}_cX\upharpoonright l\to Y\land\forall x\in_c X\upharpoonright l\varphi(x,X,f(x),Y,\overline{z})]$$

このとき $\varphi([X]_l,X,y,Y)$ を満たすただひとつの $y\in_c Y$ をとれば，

$$f'=\begin{cases}f^\frown\mathrm{zeros}(\mathrm{len}(f)-[X]_l)^\frown[y] & \text{if } [X]_l\geq\mathrm{len}(f) \\ f[y/[X]_l] & \text{if } [X]_l<\mathrm{len}(f)\end{cases}$$

と定めた $f'$ が条件を満たす． □

この定理から様々な関数のコードを作り出すことができる．まずは基本的な道具をそろえよう．

**命題 2.17** (合成関数コードの生成)**.**

$$\begin{aligned}I\Sigma_1\vdash\forall X,Y,Z,f,g(&f\colon {}_cX\to Y\land g\colon {}_cY\to Z\\ &\to\exists h(h\colon {}_cX\to Z\land\forall x\in_c X[h(x)=g(f(x))]))\end{aligned}$$

**証明.** $\forall x\in_c X\exists!z\in_c Z[\exists y\in_c Y(f(x)=y\land z=g(y))]$ であるので，定理 2.16 から以下を満たす $h$ が存在する．

$$h\colon {}_cX\to Z\land\forall x\in_c X[\exists y\in_c Y(f(x)=y\land h(x)=g(y))]$$

よって特にこの $h$ は $\forall x\in_c X[h(x)=g(f(x))]$ を満たす． □

この命題から関数の合成を行う $I\Sigma_1$ 上可証再帰的な関数が次のように定義できる．

**定義 2.18.**

$$\begin{aligned}&\mathrm{Comp}(f,g,X,Y,Z):=\\ &\quad\begin{cases}\min\{\,h\mid h\colon {}_cX\to Z\land\forall x\in_c X[h(x)=g(f(x))]\,\} & \text{if } h\colon {}_cX\to Y\land g\colon {}_cY\to Z\\ [] & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

$h\colon {}_cX\to Y\land g\colon {}_cY\to Z$ のときの $\mathrm{Comp}(f,g,X,Y,Z)$ は $g\circ f$ と略記する．

**命題 2.19** (逆関数コードの生成)**.**

$$\begin{aligned}I\Sigma_1\vdash\forall X,Y,f((&f\colon {}_cX\overset{1to1}{\underset{onto}{\to}}Y)\\ &\to\exists h(h\colon {}_cY\overset{1to1}{\underset{onto}{\to}}X\land\forall x\in_c X[x=h(f(x))]\land\forall x\in_c Y[y=f(h(y))]))\end{aligned}$$

証明．$X, Y, f$ を $f\colon {}_cX \overset{1to1}{\underset{onto}{\to}}$ となるようにとれば $\forall y \in_c Y \exists! x \in_c X[y = f(x)]$ であるので，定理 2.16 から以下を満たす $h$ が存在する．

$$h\colon {}_cY \to X \land \forall y \in_c Y[y = f(h(y))]$$

このとき，$f(x) = y$ なる $x \in_c X, y \in_c Y$ について，$h(y) = z \in_c X$ とおくと，$f(z) = f(h(y)) = y = f(x)$ より $z = x$ と分かり，$\forall x \in_c X[x = h(f(x))]$ が結論できる．$h$ が全単射であることは明らか． □

合成と同様に逆関数のコードを返す $I\Sigma_1$ 上可証再帰的な関数が次のように定義できる．

**定義 2.20.**

$$\mathrm{Inv}(f, X, Y) :=$$
$$\begin{cases} \min\{\, h \mid h\colon {}_cY \overset{1to1}{\underset{onto}{\to}} X \land \forall x \in_c X[x = h(f(x))] \land \forall x \in_c Y[y = f(h(y))]\,\} & \text{if } f\colon {}_cX \overset{1to1}{\underset{onto}{\to}} Y \\ [] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$f\colon {}_cX \overset{1to1}{\underset{onto}{\to}} Y$ のときの $\mathrm{Inv}(f, X, Y)$ は $f^{-1}$ と略記する．

**命題 2.21.** 以下が $I\Sigma_1$ で証明可能．

- $\forall X, Y, f(f\colon {}_cX \overset{1to1}{\to} Y \land g\colon {}_cY \overset{1to1}{\to} Z \to g \circ f\colon {}_cY \overset{1to1}{\to} Z)$
- $\forall X, Y, f(f\colon {}_cX \overset{onto}{\to} Y \land g\colon {}_cY \overset{onto}{\to} Z \to g \circ f\colon {}_cY \overset{onto}{\to} Z)$
- $\forall X, Y, f(f\colon {}_cX \overset{1to1}{\underset{onto}{\to}} Y \land g\colon {}_cY \overset{1to1}{\underset{onto}{\to}} Z \to g \circ f\colon {}_cY \overset{1to1}{\underset{onto}{\to}} Z)$

**定義 2.22** (シングルトンと空)**.** $\{x\} := [x], \quad \varnothing := []$

**定義 2.23** (基本的な集合の生成)**.** 以下で $m$ には $\max{}_c(X) + \max{}_c(Y) + 1$ が入る．

$$\begin{aligned}
X \cap Y = z &\leftrightarrow z \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \land \forall x < m(x \in_c z \leftrightarrow x \in_c X \land x \in_c Y) \\
X \cup Y = z &\leftrightarrow z \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \land \forall x < m(x \in_c z \leftrightarrow x \in_c X \lor x \in_c Y) \\
X \backslash Y = z &\leftrightarrow z \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \land \forall x < m(x \in_c z \leftrightarrow x \in_c X \land x \notin_c Y) \\
f^{-1}[V] = z &\leftrightarrow z \subseteq_i \mathrm{Set}(\mathrm{len}(f) + 1) \land \forall x < \mathrm{len}(f) + 1(x \in_c z \leftrightarrow f(x) \in_c V)) \\
f[U] = z &\leftrightarrow z \subseteq_i \mathrm{Set}(\max(f) + 1) \land \forall y < \max(f) + 1(y \in_c z \leftrightarrow \exists x \in_c U(y = f(x)))
\end{aligned}$$

これらの関数の $I\Sigma_1$ 上可証再帰性は定理 2.10 に依る．

$\mathrm{Set}(m) \cup \varnothing = \mathrm{Set}(m)$ である一方，$[1, 1, 4, 3] \cup \varnothing = [1, 3, 4]$ のように，一般には $X \cup \varnothing \neq X$ である．しかし定理 2.10 を経由して作られる集合のコードは $\mathrm{Set}(m)$ に $\subseteq_i$ で含意されるので命題 2.8 と系 2.9 から次が成り立つ．

**命題 2.24.** $I\Sigma_1$ で以下が証明可能．

- $\forall X, Y, a(a \in_c X \cap Y \leftrightarrow a \in_c X \land a \in_c Y)$
- $\forall X, Y, a(a \in_c X \cup Y \leftrightarrow a \in_c X \lor a \in_c Y)$

- $\forall X, Y, a(a \in_c X \backslash Y \leftrightarrow a \in_c X \wedge a \notin_c Y)$
- $\forall X, Y(X \cap Y = Y \cap X)$
- $\forall X, Y(X \cup Y = Y \cup X)$
- $\forall X, Y(\forall x(x \in_c X \leftrightarrow x \in_c Y) \to X \cup \varnothing = Y \cup \varnothing)$
- $\forall V, X, Y, f, m(X \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \wedge f \colon {}_cX \to Y \wedge V \subseteq_i Y \to f^{-1}[V] \subseteq_i X)$
- $\forall U, X, Y, f, m(Y \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \wedge f \colon {}_cX \to Y \wedge U \subseteq_i X \to f[U] \subseteq_i Y)$
- $\forall U, X, Y, f, m(X \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \wedge f \colon {}_cX \overset{1to1}{\to} Y \wedge U \subseteq_i X \to f^{-1}[f[U]] = U)$
- $\forall V, X, Y, f, m(Y \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \wedge f \colon {}_cX \overset{onto}{\to} Y \wedge V \subseteq_i Y \to f[f^{-1}[V]] = V)$

**命題 2.25.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X \exists! m \exists f(f \colon {}_cX \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(m))$

**証明.** 存在:

$X$ を昇順にソートしたコードを返す関数 $\mathrm{Sorted}(X)$ を以下で定める．

$$\mathrm{Sorted}(X) = y \leftrightarrow y \subseteq_i \mathrm{Set}(\max{}_c(X) + 1) \wedge \forall x < \max{}_c(X) + 1(x \in_c y \leftrightarrow x \in_c X)$$

$X$ を任意にとる．$\mathrm{len}(X) = 0$ なら $m = 0$ でよいのでそうでないとして $m := \mathrm{len}(\mathrm{Sorted}(X))$ とおく．このとき $\forall x \in_c X \exists! j \in_c \mathrm{Set}(m)([\mathrm{Sorted}(X)]_j = x)$ であるので定理 2.16 によって次の関数 $f$ が定まる．

$$f \colon {}_cX \to \mathrm{Set}(m); x \mapsto [\mathrm{Sorted}(X)]_{f(x)} = x$$

Claim1 $f \colon {}_cX \overset{onto}{\to} \mathrm{Set}(m)$

$j \in_c \mathrm{Set}(m)$ を任意にとれば $j \leq m - 1 = \mathrm{len}(\mathrm{Sorted}(X)) - 1$ であるから $[\mathrm{Sorted}(X)]_j \in_c X$ よりある $x \in_c X$ で $[\mathrm{Sorted}(X)]_j = x$ すなわち $j = f(x)$ が成り立つ．

Claim2 $f \colon {}_cX \overset{1to1}{\to} \mathrm{Set}(m)$

$x, y \in_c X$ に対し，$f(x) = f(y)$ と仮定すれば

$$x = [\mathrm{Sorted}(X)]_{f(x)} = [\mathrm{Sorted}(X)]_{f(y)} = y$$

から $x = y$ が成り立つ．

一意性:

異なる $n, m$ および $g, f$ で

$$g \colon {}_cX \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(n), \quad f \colon {}_cX \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(m)$$

となれば，命題 2.21 から $f \circ g^{-1} \colon {}_c\mathrm{Set}(n) \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(m)$ となる．したがって

$$\forall m \forall n < m(\neg \exists g(g \colon {}_c\mathrm{Set}(n) \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(m)))$$

を示せば十分である．$m = 0, 1, 2$ は明らか．ある $m \geq 3$ で成り立たないとすると，そのような最小の $m'$ が存在する．このとき，ある $n' < m'$ で

$$g \colon {}_c\mathrm{Set}(n') \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(m')$$

を満たす $g$ が存在することになる．$n' \geq 2$ としてよく，このとき

$$f\colon \mathrm{Set}(n'-1) \to \mathrm{Set}(m'-1); x \mapsto \begin{cases} g(n'-1) & \text{if } g(x) = m'-1 \\ g(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めた $f$ は明らかに全単射であり，$m'$ の最小性に反する． □

従って次の定義が well-defined になる．

**定義 2.26** (コードに対する擬似的な濃度)**.**

$$\mathrm{card}_c(X) = m \leftrightarrow \exists f\colon {}_cX \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(m)$$

**例 2.27.** $\mathrm{card}_c(\mathrm{Set}(m)) = m$

**証明.** $\mathrm{id}\colon {}_c\mathrm{Set}(m) \to \mathrm{Set}(m); x \mapsto x$ が自明な全単射である． □

**命題 2.28.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X, m(X \subseteq_i \mathrm{Set}(m) \to [\mathrm{card}_c(X) = 0 \leftrightarrow X = \varnothing])$

**命題 2.29.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X, Y(\mathrm{card}_c(X) = \mathrm{card}_c(Y) \leftrightarrow \exists f(f\colon X \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} Y))$

**系 2.30.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X, Y, g((g\colon {}_cX \overset{1to1}{\to} Y) \to \mathrm{card}_c(X) = \mathrm{card}_c(g[X]))$

**命題 2.31.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X, Y(X \cap Y = \varnothing \to \mathrm{card}_c(X) + \mathrm{card}_c(Y) = \mathrm{card}_c(X \cup Y))$

**証明.** $X \cap Y = \varnothing$ なる $X, Y$ をとる．$f, g, m, n$ を

$$f\colon {}_cX \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(m), \quad g\colon {}_cY \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} \mathrm{Set}(n)$$

となるようにとれば，

$$h\colon {}_cX \cup Y \to \mathrm{Set}(m+n); x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in_c X \\ g(x) + m & \text{if } x \in_c Y \end{cases}$$

が明らかに全単射になる． □

**系 2.32.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X(\mathrm{card}_c(X) = \mathrm{card}_c(X \cup \varnothing))$

**命題 2.33.** $I\Sigma_1 \vdash \forall m, n(m \leq n \leftrightarrow \exists f(f\colon {}_c\mathrm{Set}(m) \overset{1to1}{\to} \mathrm{Set}(n)))$

**証明.** $(\to)$ は自明．

$(\leftarrow)$ まず $f\colon {}_c\mathrm{Set}(m) \overset{1to1}{\to} \mathrm{Set}(n)))$ を一つとって固定しておく．もし $f$ が全射でもあるなら $n = m$ となり明らか．$f$ が全射でない場合を考えると $\mathrm{card}_c(\mathrm{Set}(n) \backslash f[\mathrm{Set}(m)]) > 0$ から以下が

成り立つ.

$$
\begin{aligned}
n &= \mathrm{card}_c(\mathrm{Set}(n)) \\
&= \mathrm{card}_c(\mathrm{Set}(n) \backslash f[\mathrm{Set}(m)] \cup f[\mathrm{Set}(m)]) \\
&= \mathrm{card}_c(\mathrm{Set}(n) \backslash f[\mathrm{Set}(m)]) + \mathrm{card}_c(f[\mathrm{Set}(m)]) && (\because \text{命題 } 2.31) \\
&> \mathrm{card}_c(f[\mathrm{Set}(m)]) \\
&= \mathrm{card}_c(\mathrm{Set}(m)) = m && (\because f \colon {}_c\mathrm{Set}(m) \underset{onto}{\overset{1to1}{\to}} f[\mathrm{Set}(m)])
\end{aligned}
$$

□

**系 2.34.** $I\Sigma_1 \vdash \forall X, Y(\mathrm{card}_c(X) \leq \mathrm{card}(Y) \leftrightarrow \exists f(f \colon {}_cX \overset{1to1}{\to} Y))$

**証明.** 命題 2.33, 2.21 から分かる. □

**補題 2.35.** $I\Sigma_1 \vdash \forall f, X, Y(f \colon {}_cX \to Y \to \mathrm{card}_c(f[X]) \leq \mathrm{card}_c(X))$

**証明.** $f \colon {}_cX \to Y$ なる $f, X, Y$ を任意にとる. すると

$$
\forall y \in_c f[X] \exists! x \in_c X[f(x) = y \wedge \forall x' < x(x' \in_c X \to f(x') \neq y]
$$

であるから定理 2.16 によって次を満たす関数 $g$ が定まる.

$$
g \colon {}_cf[X] \to X; y \mapsto \min\{\, x \in_c X \mid f(x) = y \,\}
$$

この $g$ は単射である. 実際, $y, y' \in_c f[X]$ を $g(y) = g(y')$ を満たすようにとれば $g$ の定義から $y' = f(g(y')) = f(g(y)) = y$ となる. ゆえに系 2.34 によって $\mathrm{card}_c(f[X]) \leq \mathrm{card}_c(X)$ が分かる. □

**定義 2.36** (総連結)**.** 2 変数関数 $\bigcup^j P$ を以下のように原始再帰法で定義する.

$$
\begin{cases}
\bigcup^0 P & = \varnothing (= []) \\
\bigcup^{j+1} P & = (\bigcup^j P) \cup [P]_j
\end{cases}
$$

**補題 2.37.** $I\Sigma_1 \vdash \forall P, a(a \in_c \bigcup^{\mathrm{len}(P)} P \leftrightarrow \exists i < \mathrm{len}(P)(a \in_c [P]_i))$

**証明.** $P$ を任意にとって固定しておく. 以下を $j$ の $\mathrm{len}(P)$ までの帰納法で示す.

$$
\forall j \leq \mathrm{len}(P)[\forall a(a \in_c \textstyle\bigcup^j P \leftrightarrow \exists i < j(a \in_c [P]_i))]
$$

$j = 0$ なら明らか. $j = 1$ も $\bigcup^1 P = \varnothing \cup [P]_0$ より明らか. よって $j \geq 1$ としてよい. このとき,

$$
\begin{aligned}
a \in_c \textstyle\bigcup^{j+1} P &\leftrightarrow a \in_c (\textstyle\bigcup^j P) \cup [P]_j && (\because \text{総連結の定義}) \\
&\leftrightarrow a \in_c \textstyle\bigcup^j P \vee a \in_c [P]_j \\
&\leftrightarrow \exists i < j(a \in_c [P]_i) \vee a \in_c [P]_j && (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&\leftrightarrow \exists i < j + 1(a \in_c [P]_i)
\end{aligned}
$$

□

**補題 2.38.**

$$I\Sigma_1 \vdash \forall P(\forall j < \mathrm{len}(P)([P]_j \cap \bigcup^j P = \varnothing) \to \textstyle\sum_{i<\mathrm{len}(P)} \mathrm{card}_c([P]_i) = \mathrm{card}_c(\bigcup^{\mathrm{len}(P)} P))$$

**証明.** $\forall j < \mathrm{len}(P)([P]_j \cap \bigcup^j P = \varnothing)$ を満たす $P$ を任意にとって固定しておく．次を $j$ の $\mathrm{len}(P)$ までの帰納法によって示す．

$$\forall j \leq \mathrm{len}(P) \left[\sum_{i<j} \mathrm{card}_c([P]_i) = \mathrm{card}_c(\bigcup^j P)\right]$$

$j = 0$ なら自明．インダクションステップは以下である．

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j+1} \mathrm{card}_c([P]_i) &= \sum_{i<j} \mathrm{card}_c([P]_i) + \mathrm{card}_c([P]_j) \\
&= \mathrm{card}_c(\bigcup^j P) + \mathrm{card}_c([P]_j) && (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= \mathrm{card}_c((\bigcup^j P) \cup [P]_j) && (\because \text{命題 } 2.31) \\
&= \mathrm{card}_c(\bigcup^{j+1} P)
\end{aligned}$$

□

$e, X$ を与えれば $\{ A \subseteq X \mid \mathrm{card}(A) = e \}$ のコードを返す関数は以下のように定義できる．

**定義 2.39.** $F'$ を系 2.5 のものとする．

$$\begin{aligned}
&[X]^e = z \leftrightarrow \\
&\quad z \subseteq_i \mathrm{Set}(F'(\max{}_c(X), e)) \wedge \forall A \leq F'(\max{}_c(X), e)(A \in_c z \leftrightarrow A \subseteq_i X \wedge \mathrm{card}_c(A) = e)
\end{aligned}$$

この関数の $I\Sigma_1$ 上可証再帰性は定理 2.10 から直接従う．また $F'(\max{}_c(X), e)$ が $A \subseteq_i X \wedge \mathrm{card}_c(A) = e$ なる $A$ たちの上界になっていることは系 2.5 から直ちに分かる．

**例 2.40.** $[\mathrm{Set}(m)]^2$ は順番は多少前後するかも知れないがおおよそ以下のような物になっている．

$$[[0,1], [0,2], ..., [0, m-1], [1,2], [1,3], ..., [m-1, m]]$$

つまり，$[\mathrm{Set}(m)]^2$ は長さ 2 の $0 \leq v_0 < v_1 < m$ なるペア $[v_0, v_1]$ を全て含む集合のコードになっている．

以上の素朴集合論に関する一連の関数・関係によって有限ラムゼーの主張が次のように算術の言語で表せる．

**定義 2.41.** 次の $\mathscr{L}_A$ 論理式を $[m \to (k)^n_c]$ と書く．

$$\forall f\{(f\colon {}_c[\mathrm{Set}(m)]^n \to \mathrm{Set}(c)) \to \exists d < c \exists H \subseteq_i \mathrm{Set}(m)[\mathrm{card}_c(H) = k \wedge \underbrace{\forall A \in_c [H]^n(f(A) = d)}_{H\text{ が } f \text{ に関して均質}}]\}$$

**定義 2.42.** 次の $\mathscr{L}_A$ 文を形式化された有限ラムゼーの定理とよぶ．

$$\forall n, c, k \exists m [m \to (k)^n_c]$$

$[m \to (k)^n_c]$ は定義から $\Pi_1$ 論理式であるが，実際には $\Delta_1(I\Sigma_1)$ である．これは，考えるべき $f\colon {}_c[\mathrm{Set}(m)]^n \to c$ という関数のコードに上界を与えることによって示される．

**命題 2.43.**

$$\begin{aligned}&I\Sigma_1 \vdash \forall X, Y, f (f\colon {}_cX \to Y \\ &\qquad \to \exists g \le F'(\max{}_c(Y), \max{}_c(X) + 1)(g\colon {}_cX \to Y \wedge \forall x \in_c X(g(x) = f(x))))\end{aligned}$$

ここで $F'$ は系 2.5 のものである．

**証明.** $X, Y, f$ を $f\colon {}_cX \to Y$ を満たすように任意にとって固定しておく．

明らかに

$$\forall x \in_c [0, \max{}_c(X)] \exists! y \in_c Y^\frown[0]\{(x \in_c X \to y = f(x)) \wedge (x \notin_c X \to y = 0)\}$$

であるから[*2]，次を満たす $f'$ が定理 2.16 によってとれる．

$$\begin{aligned}&f'\colon {}_c[0, \max{}_c(X)] \to Y^\frown[0] \\ &\quad \wedge \forall x \in_c [0, \max{}_c(X)](x \in_c X \to f'(x) = f(x)) \wedge (x \notin_c X \to f'(x) = 0)\end{aligned}$$

さらに $f'' := f' \restriction (\max{}_c(X) + 1)$ とおくと $\forall x(x \in_c X \to x \in_c [0, \max{}_c(X)])$ であるから，この $f''$ について $f''\colon {}_cX \to Y \wedge \forall x \in_c X(f''(x) = f(x))$ が成り立つ．いま $f''$ は定義から

$$\mathrm{len}(f'') = \max{}_c(X) + 1 \wedge \forall x \in_c [0, \max{}_c(X)](f''(x) \in Y)$$

すなわち

$$\mathrm{len}(f'') \le \max{}_c(X) + 1 \wedge \forall x < \mathrm{len}(f'')(f(x) \le \max(Y))$$

が成り立つので，系 2.5 から以下を満たす $g$ が存在する．

$$g \le F'(\max{}_c(Y), \max{}_c(X) + 1) \wedge \mathrm{len}(g) = \max{}_c(X) + 1 \wedge \forall x < \mathrm{len}(g)(g(x) = f''(x))$$

□

この命題によって $X$ から $Y$ への関数のコードは $F'(\max{}_c(Y), \max{}_c(X) + 1)$ 以下の値で少なくとも一つは見つかることが分かる．したがって次が成り立つ．

**系 2.44.**

$$\begin{aligned}&I\Sigma_1 \vdash [m \to (k)^n_c] \leftrightarrow \forall f \le F'(c, \max{}_c([\mathrm{Set}(m)]^n) + 1)\{(f\colon {}_c[\mathrm{Set}(m)]^n \to \mathrm{Set}(c)) \\ &\qquad \to \exists d < c \exists H \subseteq_i \mathrm{Set}(m)[\mathrm{card}_c(H) = k \wedge \forall A \in_c [H]^n([f]_A = d)]\}\end{aligned}$$

ゆえに $[m \to (k)^n_c]$ は $\Delta_1(I\Sigma_1)$ 論理式である．

---

[*2] $[0, \max{}_c(X)]$ は区間．

さて，記号が煩雑になり可読性が低下してきたので標準的な数学における記号の使い方に沿っていくつかの表記法を改める．

- $\mathrm{Set}(m)$ を指して，文脈から容易にそれと分かる場合[*3]に $m$ と書く．
- $[F]_i\colon {}_c[D]_i \to [R]_i$ などは $F_i\colon {}_cD_i \to R_i$ のように四角括弧を省略する．他にも四角括弧は一意解読性を妨げない限りできるだけ省略する．
- $f\colon {}_c[X]^n \to Y$ と $A \in_c X$ については $A$ を $\{a_1, ..., a_n\}$ のように $n$ 個組だと分かるように書き，$f(A)$ を $f(\{a_1, ..., a_n\})$ または $f(a_1, ..., a_n)$ と表記する．この表記は超準モデルにおいて $n$ が超準元の場合にも認める．

この新しい表記法のもとで $[m \to (k)^n_c]$ の定義を書き直すと次のようになる．

$$\forall f\{(f\colon {}_c[m]^n \to c) \to \exists d < c \exists H \subseteq_i m[\mathrm{card}_c(H) = k \wedge \forall\{a_1, ..., a_n\} \in_c [H]^n(f(a_1, ..., a_n) = d)]\}$$

さらに，定理 2.10 をより直感的に適用するために，$X$ が

$$X \subseteq_i \mathrm{Set}(z) \wedge \forall x < z(x \in_c X \leftrightarrow \varphi(x, \overline{y}, z))$$

を満たすことを

$$X = \{\, x < z \mid \varphi(x, \overline{y}, z) \,\}$$

と表記することにする．また $z$ が文脈から明らかな場合はより簡単に $X = \{\, x \mid \varphi(x, \overline{y}, z) \,\}$ と書くことにする．

# 3　$PA \vdash$ 有限ラムゼー

本稿で与えた有限ラムゼーの定理の形式化（定義 2.42）は数ある形式化の一つにすぎず，その形式化の妥当性は検証が必要なことである．極端な例だが，$1 = 1$ という論理式を $\forall n, c, k \exists m[m \to (k)^n_c]$ と書くと定義しても，現段階で定義 2.42 の方がもっともらしいといえる明確な根拠はない．そこでここでは $I\Sigma_1$ 内部で素朴集合論を展開するために定義した関数や関係たちを用いて，定義 2.42 の論理式を通常の数学で行うような議論によって $PA$（実際には $I\Sigma_2$）から証明する．

**補題 3.1.** $I\Sigma_1 \vdash \forall k, c \exists m[m \to (k)^1_c]$

**証明.** これは $I\Sigma_1 \vdash \forall k, c[(k-1)c + 1 \to (k)^1_c]$ を示せば十分．$k, c$ を任意にとるが，自明な場合を除くために $k, c \geq 1$ としてよい．背理法で示す．$f\colon {}_c[(k-1)c+1]^1 \to c$ で

$$\forall j < c \forall H \subseteq_i (k-1)c + 1[\forall A \in_c [H]^1(f(A) = j) \to \mathrm{card}_c(H) \neq k]$$

を満たすものが存在したと仮定する．いま $A \in_c [H]^1$ なる $A$ は $H$ の要素のシングルトンなので

$$\forall j < c \forall H \subseteq_i (k-1)c + 1[\forall x \in_c H(f(x) = j) \to \mathrm{card}_c(H) < k] \tag{3.1}$$

[*3] 例えば $\subseteq_i \mathrm{Set}(m)$ のように集合のコードを考えている場合．

と書き換わる．ここで $P$ を系 2.11 を利用して以下を満たすようにとる．

$$\mathrm{len}(P) = c \land \forall j < c([P]_j \subseteq_i (k-1)c+1(\forall x < (k-1)c+1(x \in_c [P]_j \leftrightarrow f(x) = j)))$$

すると任意の $x$ について

$$\begin{aligned} x \in_c \mathrm{Set}((k-1)c+1) &\leftrightarrow x < (k-1)c+1 \\ &\leftrightarrow \exists i < \mathrm{len}(P)(x \in_c [P]_i) \qquad (\because \forall x < (k-1)c+1(f(x) < c)) \\ &\leftrightarrow x \in_c \bigcup^{\mathrm{len}(P)} P \qquad (\because \text{補題 } 2.37) \end{aligned}$$

となるので $\mathrm{Set}((k-1)c+1) = \bigcup^{\mathrm{len}(P)} P$ が成り立つ．したがって

$$\mathrm{card}_c(\bigcup^{\mathrm{len}(P)} P) = \mathrm{card}_c(\mathrm{Set}((k-1)c+1)) = ((k-1)c+1 \tag{3.2}$$

となる一方，補題 2.38 によれば

$$\begin{aligned} \mathrm{card}_c(\bigcup^{\mathrm{len}(P)} P) &= \sum_{i<\mathrm{len}(P)} \mathrm{card}_c([P]_i) \\ &\leq \sum_{i<c} k-1 \qquad (\because \text{式 } (3.1)) \\ &\leq (k-1)c \end{aligned}$$

が導かれて矛盾が生じる． □

**命題 3.2** (定義域の位置の任意性)**.**

$I\Sigma_1 \vdash \forall n,k,c,m([m \to (k)^n_c] \leftrightarrow \forall u, X(\mathrm{card}_c(X) = m \land X \subseteq_i \mathrm{Set}(u) \to$
$\forall f((f\colon {}_c[X]^n \to c) \to \exists d < c \exists H \subseteq_i X[\mathrm{card}_c(H) = k \land \forall \{a_1,...,a_n\} \in_c [H]^n(f(a_1,...,a_n) = d)])))$

**証明．** $(\leftarrow)$ は明らか．

$(\rightarrow)$ $n,k,c,m$ を任意にとって固定し，$u, X$ を $\mathrm{card}_c(X) = m \land X \subseteq_i \mathrm{Set}(u)$ を[*4]満たすようにとる．

$g\colon {}_c m \overset{1to1}{\underset{onto}{\to}} X$ を一つとり，

$$h\colon {}_c[m]^n \to [X]^n; A \mapsto g[A]$$

と定める．この $h$ が全単射であることを確認する．

まず $A, B \in_c [m]^n$ について $h(A) = h(B)$ だとすると $g[A] = h(A) = h(B) = g[B]$ で $g$ が単射なので命題 2.24 から

$$A = g^{-1}[g[A]] = g^{-1}[g[B]] = B$$

を得る．また任意に $Y \in_c [X]^n$ をとれば $Y \subseteq_i X \land \mathrm{card}_c(Y) = e$ なので $g$ の全単射性から $g^{-1}[Y] \subseteq_i m$ かつ $\mathrm{card}_c(g^{-1}[Y]) = e$ つまり $g^{-1}[Y] \in_c [m]^n$ となり，

$$h(g^{-1}[Y]) = g[g^{-1}[Y]] = Y$$

[*4] $X \subseteq_i \mathrm{Set}(u)$ は証明を容易にするための本質的でない条件であるが，そうでない $X$ を以降考えることはないのでこのままにしておく．

を得る．以上から $h$ は全単射である．

いま $f\colon {}_c[X]^n \to c$ を任意にとる．このとき $f\circ h\colon {}_c[m]^n \to c$ に $[m \to (k)^n_c]$ を適用して $f\circ h$ に関して均質な $H \subseteq_i m$ を得る．$d < c$ を

$$\forall A \in_c [H]^n((f\circ h)(A) = d)$$

となるようにとれば，任意にとった $Y \in_c [g[H]]^n$ は $g^{-1}[Y] \in_c [H]^n$ であるから，

$$f(Y) = f(g[g^{-1}[Y]]) = (f\circ h)(g^{-1}[Y]) = d$$

が成り立ち $g[H]$ が $f$ に関して均質な集合であることが分かる． □

次の有限ラムゼーの定理の証明は Wong [2] における Finite Ramsey Theorem (FRT). の証明を参考にした．

**定理 3.3.** $I\Sigma_2 \vdash \forall n, c, k\exists m[m \to (k)^n_c]$ *5

**証明.** $c$ を任意にとって $n$ に関する帰納法で $\forall n\forall k\exists m[m \to (k)^n_c]$ を示す．

$n = 0$ は考えるべき写像が存在しない．$n = 1$ は有限鳩ノ巣原理として既に示した（cf. 補題 3.1）．$n \geq 1$ で成り立つと仮定すれば $I\Sigma_2 \vdash \forall k\exists m[m \to (k)^n_c]$ なので，

$$\mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}(k) := \min\{\, m \mid [m \to (k)^n_c]\,\}$$

と $I\Sigma_2$ 上可証再帰的な 1 変数関数 $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}(k)$ を定義でき*6，さらにまた

$$\begin{cases} \mathrm{d}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}(0) & = n \\ \mathrm{d}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}(x+1) & = \mathrm{R}^{n}_{c}(\mathrm{d}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}(x)) + 1 \end{cases}$$

で関数 $\mathrm{d}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}(x)$ が定義できる．ここで $l := (k-1)c+1$ とおき，$d$ を $\forall i < l+1([d]_i = \mathrm{d}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}(l-i+1))$ を満たすようにとる．つまり

$$[d]_l < [d]_{l-1} < \cdots < [d]_{i+1} < [d]_i < \cdots < [d]_0$$

とは

$$n < \mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}(n) + 1 < \cdots < [d]_{i+1} < \mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}([d]_{i+1}) + 1 < \cdots < \mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}([d]_1) + 1$$

という列である．

Claim: $[[d]_0 \to (k)^{n+1}_c]$

$f\colon {}_c[[d]_0]^{n+1} \to c$ を任意にとる．まず以下が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned} &\exists S, F[\mathrm{len}(S) = l+1 \land \mathrm{len}(F) = l \land S_0 = \mathrm{Set}([d]_0) \land \\ &\forall j < l(F_j\colon {}_c[S_j \backslash \{\min{}_c(S_j)\}]^n \to c \land \mathrm{card}_c(S_j) = [d]_j \land \mathrm{card}_c(S_{j+1}) = [d]_{j+1} \land S_{j+1} \subseteq_i S_j \\ &\qquad\qquad \land \exists u < c\forall X \in_c [S_{j+1}]^n(F_j(X) = u) \\ &\qquad\qquad \land \forall X \in_c [S_j\backslash\{\min{}_c(S_j)\}]^n(F_j(X) = f(\{\min{}_c(S_j)\} \cup X)))] \end{aligned}$$

*5 実際には $I\Sigma_1$ で証明できることが知られている．

*6 関数のコードを考えているわけではない．

以下が成り立つことを $i$ の $l$ までの帰納法で示せばよい．

$$\begin{aligned}&\forall i \leq l \exists S, F[\mathrm{len}(S) = i+1 \wedge \mathrm{len}(F) = i \wedge S_0 = \mathrm{Set}([d]_0) \wedge \\ &\qquad \forall j < i(F_j \colon {}_c[S_j \backslash \{\min{}_c(S_j)\}]^n \to c \wedge \mathrm{card}_c(S_j) = [d]_j \wedge \mathrm{card}_c(S_{j+1}) = [d]_{j+1} \wedge S_{j+1} \subseteq_i S_j \\ &\qquad\qquad \wedge \exists u < c \forall X \in_c [S_{j+1}]^n (F_j(X) = u) \\ &\qquad\qquad \wedge \forall X \in_c [S_j \backslash \{\min{}_c(S_j)\}]^n (F_j(X) = f(\{\min{}_c(S_j)\} \cup X)))]\end{aligned}$$

$i = 0$ なら自明．ある $i < l$ で成り立つとし，そのときの $S, F$ をとる．ここで $f'$ を以下で定める．

$$f' \colon {}_c[S_i \backslash \{\min{}_c(S_i)\}]^n \to c \wedge (f'(X) = f(\{\min{}_c(S_i)\} \cup X))$$

するといま

$$\mathrm{card}_c(S_i \backslash \{\min{}_c(S_i)\}) = [d]_i - 1 = \mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}([d]_{i+1})$$

であるので，$[\mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{c}}([d]_{i+1}) \to ([d]_{i+1})^n_c]$ と命題 3.2 よりある $T \subseteq_i S_i \backslash \{\min{}_c(S_i)\}$ で

$$\mathrm{card}_c(T) = [d]_{i+1} \wedge \exists u < c \forall X \in_c [T]^n (f'(X) = u)$$

を満たすものが存在する．したがって $F' = F \cup \{f_i\}$，$S' = S \cup \{T\}$ とすればそれぞれ $i+1$ の条件を満たす．

$S, F$ を先ほど存在を示したものとする．$S_i$ たちは以下のようになっている．

$$\mathrm{Set}([d]_0) = S_0 \supseteq_i S_1 \supseteq_i S_2 \supseteq_i \cdots \supseteq_i S_l$$

ここで $g \colon {}_c l \to c$ を

$$\forall j < l(g(j) = \min\{\, u < c \mid \forall X \in_c [S_{j+1}]^n (F_j(X) = u) \,\})$$

で定めると，有限鳩ノ巣からある $I \subseteq_i l \wedge \mathrm{card}_c(I) = k$ と $p < c$ が存在し，

$$\forall x \in_c I(g(x) = p)$$

となる．いま $H$ を $H := \{\, x < [d]_0 \mid \exists i \in_c I(x = \min{}_c(S_i)) \,\} \,(\subseteq_i \mathrm{Set}([d]_0))$ によって定める．このとき任意にとった $A \in_c [H]^{n+1}$ は，ある $i_0, i_1, ..., i_n \in_c I$ によって

$$A = [\min{}_c(S_{i_0}), \min{}_c(S_{i_1}), ..., \min{}_c(S_{i_n})] = \{\min{}_c(S_{i_0})\} \cup B$$

と書ける．ここで $B$ は $[\min{}_c(S_{i_1}), ..., \min{}_c(S_{i_n})]$ であり，特に $B \subseteq_i S_{i_0} \backslash \min{}_c(S_{i_0})$ であるので

$$f(A) = f(\{\min{}_c(S_{i_0})\} \cup B) = F_{i_0}(B) = g(i_0) = p$$

が成り立つ．よって $A$ の任意性より

$$\forall A \in_c [H]^{n+1} (f(A) = p)$$

が結論できる．

□

**系 3.4.** $\mathbb{N} \models \forall n, c, k \exists m[m \to (k)^n_c]$

# 参考文献


[1] Richard Kaye, “Models of Peano Arithmetic” ,（Oxford logic guides, 15）（Oxford science publications）Clarendon Press , Oxford University Press,1991.

[2] Tin Lok Wong, MA5219 Logic and Foundation of Mathematics I: the consistency of arithmetic, Lecturs23.Ramsey’s Theorems,2018. https://blog.nus.edu.sg/matwong/teach/cons/