一階ペアノ算術におけるラムゼー型組合せ論的命題のモデル理論を用いた独立性証明

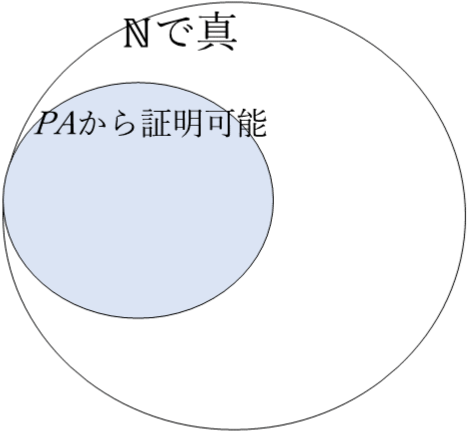
橋本航気

2022 年 2 月 10 日

一階ペアノ算術 PA は自然数論の形式的理論の一つ
自然数の和・積・順序に関する公理（例:積の交換法則 $\forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$）
である離散全順序環の非負部の公理系＋帰納法公理図式

定理 (PA の健全性)

PA で証明可能な命題は $\mathbb{N}$ で真.

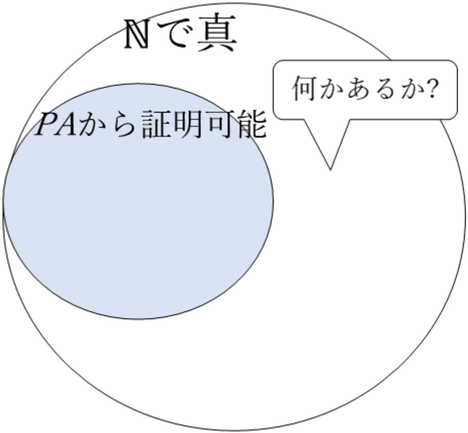


一階ペアノ算術 PA は自然数論の形式的理論の一つ

定理 (PA の健全性)

PA で証明可能な命題は $\mathbb{N}$ で真.

Q. この逆，$\mathbb{N}$ で真な命題は PA で証明可能（PA の完全性）は成り立つか.



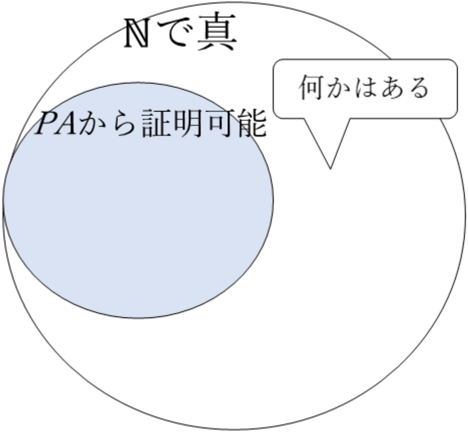
一階ペアノ算術 PA は自然数論の形式的理論の一つ

定理 (PA の健全性)

PA で証明可能な命題は $\mathbb{N}$ で真.

Q. この逆，$\mathbb{N}$ で真な命題は PA で証明可能（PA の完全性）は成り立つか.

A. 成り立たない（$\because$ 第一不完全性定理）.



一階ペアノ算術 PA は自然数論の形式的理論の一つ

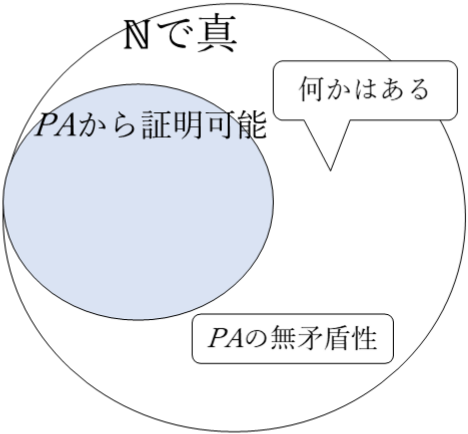
定理 (PA の健全性)

PA で証明可能な命題は $\mathbb{N}$ で真.

Q. この逆，$\mathbb{N}$ で真な命題は PA で証明可能（PA の完全性）は成り立つか.
A. 成り立たない（∵ 第一不完全性定理）．特に自身の無矛盾性（∵ 第二不完全性定理）.

注意

右図の狭間にあるものが PA の独立命題である.

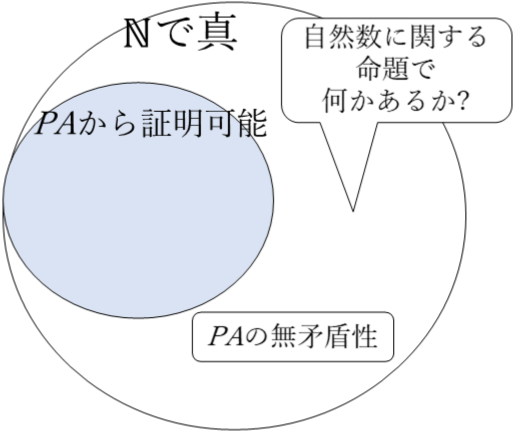


一階ペアノ算術 PA は自然数論の形式的理論の一つ

定理 (PA の健全性)

PA で証明可能な命題は $\mathbb{N}$ で真.

Q. この逆，$\mathbb{N}$ で真な命題は PA で証明可能（PA の完全性）は成り立つか.
A. 成り立たない（∵ 第一不完全性定理）．特に自身の無矛盾性（∵ 第二不完全性定理）.
Q. $\mathbb{N}$ で真な "自然数に関する" 命題で PA から証明できないものはあるか.



一階ペアノ算術 PA は自然数論の形式的理論の一つ

定理 (PA の健全性)

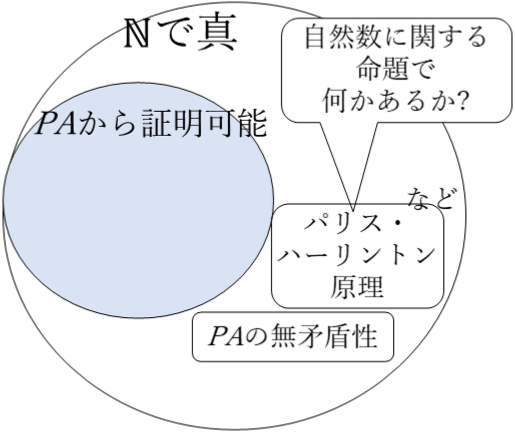
PA で証明可能な命題は $\mathbb{N}$ で真.

Q. この逆，$\mathbb{N}$ で真な命題は PA で証明可能（PA の完全性）は成り立つか.

A. 成り立たない（∵第一不完全性定理）. 特に自身の無矛盾性（∵第二不完全性定理）.

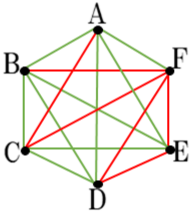
Q. $\mathbb{N}$ で真な "自然数に関する" 命題で PA から証明できないものはあるか.

A. パリス・ハーリントン原理 (1977) などがある.



例 (パーティー問題)

6 人いれば，3 人が互いに知り合いであるか，初対面であるかのいずれかの状況が発生する．



緑:知り合い
赤:初対面

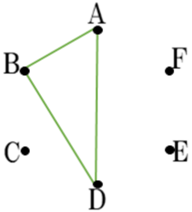
任意の $f\colon [\{A,\dots,F\}]^2 \to \{$ 緑, 赤 $\}$ に[a] 対し，
ある $H \subseteq \{A,\dots,F\}$ が存在し，
H の要素数が 3 かつ f が $[H]^2$ 上で一定

左の図なら $H=\{A,B,D\}$ で
$f(\{A,B\}) = f(\{A,D\}) = f(\{B,D\}) =$ 緑

---
[a] $[X]^2 := \{Y \subseteq X \mid Y$ の要素数 $= 2\}$

例 (パーティー問題)

6 人いれば，3 人が互いに知り合いであるか，初対面であるかのいずれかの状況が発生する．



緑:知り合い
赤:初対面

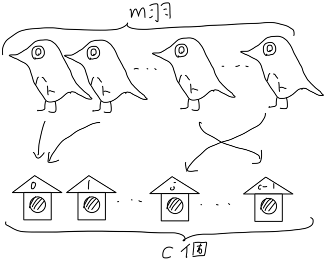
任意の $f\colon [\{A, ..., F\}]^2 \to \{$ 緑, 赤 $\}$ に[a] 対し，
ある $H \subseteq \{A, ..., F\}$ が存在し，
H の要素数が 3 かつ f が $[H]^2$ 上で一定

左の図なら $H = \{A, B, D\}$ で
$f(\{A, B\}) = f(\{A, D\}) = f(\{B, D\}) =$ 緑

[a] $[X]^2 := \{Y \subseteq X \mid Y$ の要素数 $= 2\}$

例 (有限鳩ノ巣原理)

任意の $c, k \in \mathbb{N}$ に対し，以下を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する．
c 個の鳩の巣に合計 m 羽の鳩がいれば，k 羽以上鳩がいる鳩の巣がある．



任意の $f\colon [m]^1 \to c$ に[a]対し，
ある $H \subseteq m$ が存在し，
H の要素数が k かつ f が $[H]^1$ 上一定．

f は m 個の点（＝鳩）の c 色塗り分け（＝鳩の巣の割り当て）とみなせる．

[a] $[X]^1 := \{Y \subseteq X \mid Y$ の要素数 $= 1\}$
$\mathbb{N} \ni m = \{0, 1, ..., m-1\}$

定義

$X \subseteq \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ について

$$[X]^n := \{Y \subseteq X | \mathrm{card}(Y) = n\} (\subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}))$$

$X \subseteq \mathbb{N}, n, c, k \in \mathbb{N}$ に対し

$X \to (k)^n_c :\Leftrightarrow$ 「任意の $f : [X]^n \to c$ に対し，ある $H \subseteq X$ が存在し，$\mathrm{card}(H) = k$ かつ $f \restriction [H]^n$ が定数関数になる」

$m \in \mathbb{N}$ は集合 $\{0, \ldots, m-1\}$ と同一視 (0 は $\varnothing$ と同一視).
例えば $[4]^2 = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

例 (パーティー問題)

$6 \to (3)^2_2$

例 (有限鳩ノ巣原理)

$\forall c, k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}[m \to (k)^1_c]$

定理 (有限ラムゼーの定理)

$\forall n, c, k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}[m \to (k)^n_c]$

$X \to (k)^n_c \Leftrightarrow$ 「任意の $f : [X]^n \to c$ に対し，ある $H \subseteq X$ が存在し，$\mathrm{card}(H) = k$ かつ $f \restriction [H]^n$ が定数関数になる」

定理 (有限ラムゼーの定理)

$\forall n, c, k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}[m \to (k)^n_c]$

定義

$X \subseteq \mathbb{N}, n, c, k \in \mathbb{N}$ に対し

$X \underset{*}{\to} (k)^n_c :\Leftrightarrow$ 「任意の $f : [X]^n \to c$ に対し，ある $H \subseteq X$ が存在し，$\mathrm{card}(H) \geq \max(k, \min(H))$ かつ $f \restriction [H]^n$ が定数関数になる」

定理 (パリス・ハーリントン原理)

$\forall n, c, k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}[m \underset{*}{\to} (k)^n_c]$

定義

$X \subseteq \mathbb{N}, n, k \in \mathbb{N}$ に対し

$X \to (k)^n_{reg} :\Leftrightarrow$ 「任意の<u>後退的な</u>$f : [X]^n \to \mathbb{N}$ に対し，
ある $H \subseteq X$ が存在し，$\mathrm{card}(H) = k$ であって，
$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，$x_1 < y_2 < \cdots < y_n$ なる任意の
$2n - 1$ 個の H の元に対し
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, y_2, \ldots, y_n)$ が成り立つ.」

ただしここで $f : [X]^n \to \mathbb{N}$ が後退的であるとは，
すべての $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ $(x_i \in X)$ に対し $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) < x_1$ となることを意味する.

定理 (金森・マカルーン原理)

$\forall n, k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} [m \to (k)^n_{reg}]$

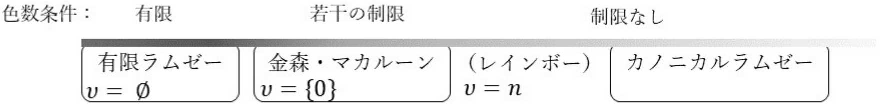
定義

$X \subseteq \mathbb{N}, n, k \in \mathbb{N}$ に対し

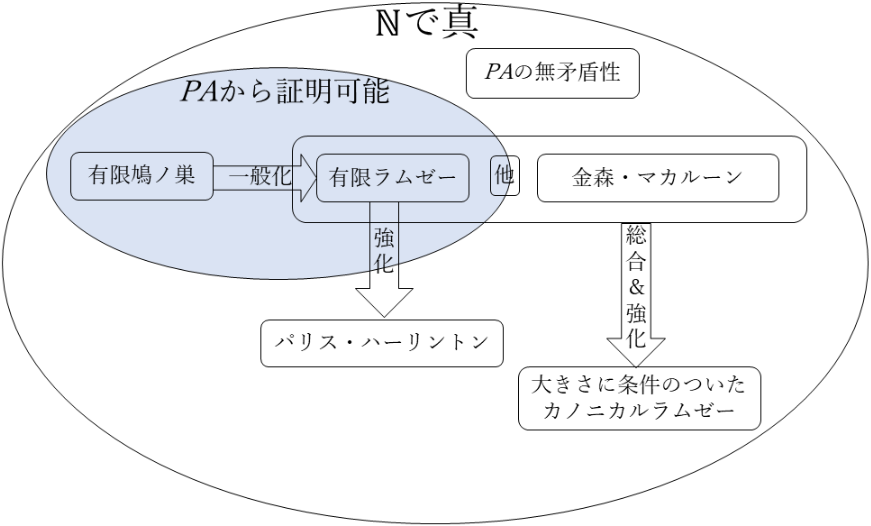
$X \overset{\text{can}}{\underset{*}{\rightarrow}} (k)^n :\Leftrightarrow$ 「任意の $\mathrm{dom}(f) = [X]^n$ なる f に対し，
ある $H \subseteq X$ と $\upsilon \subseteq n$ が存在し，
$\mathrm{card}(H) \geq \max(k, \min(H))$ かつ任意の H の元
$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1}, y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1}$ に対し，
$\forall i \in \upsilon, x_i = y_i \Leftrightarrow f(x_0, ..., x_{n-1}) = f(y_0, ..., y_{n-1})$
が成り立つ．」

定理 (大きさに条件が付いたカノニカルラムゼーの定理)

$\forall n, k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N}[m \overset{\text{can}}{\underset{*}{\rightarrow}} (k)^n]$



$m \rightarrow (k)^n_c$ $\quad m \rightarrow (k)^n_{reg}$ $\quad m \overset{\text{can}}{\underset{*}{\rightarrow}} (k)^n$


Nで真
PAの無矛盾性
PAから証明可能
有限鳩ノ巣
一般化
有限ラムゼー
他
金森・マカルーン
強化
総合&強化
パリス・ハーリントン
大きさに条件のついた
カノニカルラムゼー

定義

$Y(x,y)$ は以下の条件を満たすとき，（PA において）PA を充足するのための良く振る舞う指標 (*well-behaved indicator*) とよぶ．

- $Y(x,y)=z$ は PA 上可証再帰的な関数．
- $PA \vdash \forall x,y,x',y'(x' \leq x \wedge y \leq y' \rightarrow Y(x,y) \leq Y(x',y') \leq y')$
- 任意の超準モデル $M \models PA$ と任意の $a,b \in M$ に対し．
  $\mathbb{N} < Y(a,b) \Leftrightarrow a \in I < b$ かつ $I \models PA$ を満たす M の始切片 I が存在．

定理

- $Y_{PH}(x,y) := \max\{e | \forall n \leq e([x,y] \underset{*}{\rightarrow} (2n)^n_3)\}$
- $Y_{KM}(x,y) := \max\{e | \forall n \leq e([x,y] \rightarrow (2n)^n_{reg})\}$
- $Y_{ERL}(x,y) := \max\{e | \forall n \leq e([x,y] \overset{\mathrm{can}}{\underset{*}{\rightarrow}} (2n)^n)\}$

はそれぞれ PA を充足するための良く振る舞う指標となる．

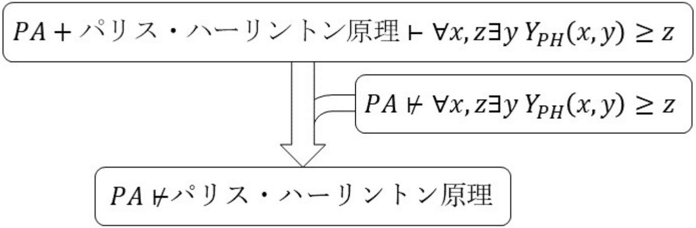
$$Y_{PH}(x,y) := \max\{e \mid \forall n \le e([x,y] \underset{*}{\to} (2n)^n_3)\}$$

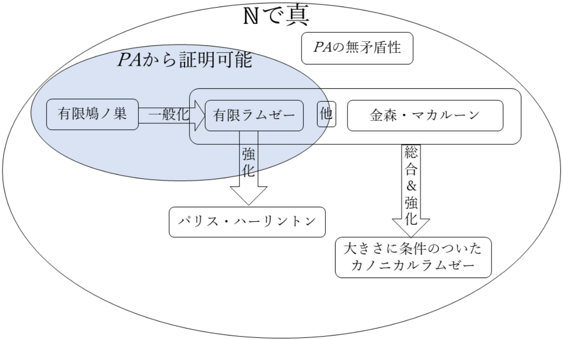
は PA を充足するための良く振る舞う指標となる.

定理

PA を充足するための良く振る舞う指標 $Y(x,y)$ について以下が成り立つ.

$$PA \nvdash \forall x, z \exists y Y(x,y) \ge z$$





結論

うまく何かしらの命題と関連づいた指標が定義できさえすれば，数学的に有意味な PA の独立命題を構成できるため，PA を調べる際に指標は有用な道具の一つである．

関連

パリス・ハーリントン原理の独立性証明には他にも急増加関数 $PH(n,c,k) = (\mu m)[m \underset{*}{\to} (k)^n_c]$ が PA 上可証再帰的なクラスから外れることを利用する証明論的方法がある．

以降のスライドは参考文献リスト．

参考文献

- Richard Kaye, “Models of Peano Arithmetic” ,（Oxford logic guides, 15）（Oxford science publications） Clarendon Press , Oxford University Press,1991.
- Mojtaba Aghaei. Amir Khamseh. ”Combinatorial Unprovability Proofs and Their Model-Theoretic Counterparts.” Notre Dame J. Formal Logic 55 (2) ,2014. pp.231 - 244, . https://doi.org/10.1215/00294527-2420654
- Helmut Schwichtenberg and Stanley S Wainer. ”Proofs and Computations” (Perspectives in Logic). Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- Jeff Paris and Leo Harrington. “A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic”, in Barwise 1977, pp. 1133 - 42.