RCA_0 上で動作する Turing functional を作る

橋本 航気

最終更新 2022 年 12 月 28 日

概要

計算可能関数のグラフが Σ_1 であるという事実（定理 1.22）を足掛かりに Δ_0 論理式の充足関係述語 Sat_{Δ_0} を用いて Turing functional を RCA_0 上で定式化し，それが本来の Turing functional と同等の動作をすることを確認する．必要となる定義や事実は記法を明示するためにもはじめの節にまとめた．付録はそこで列挙した事実や 2 節において形式的な証明を省略した箇所の詳細な証明を集めたものである．

この文書に関する説明

本稿は Alwe_Logic さんが企画された Mathematical Logic Advent Calendar 2022（`https://adventar.org/calendars/7465`）の 17 日目の記事である．

RCA_0 はその頭文字から連想できるように基本的な再帰理論[*1]展開できるのだが，実際にそれを詳しく書いている文献は筆者には見つけられなかった．それでいてこの事実は頻繁に用いられるので，自分用にもまとまったものがあれば嬉しいと思いこの記事を書いた．

本稿では 1 節に書いた定義や事実を既に半分程度知っている，ないしは受け入れている人を対象読者としている．そのため基本的には 2 節から読みはじめて必要に応じて前後の節を読んでもらうのが効率的だと思う．

目次

[*1] 最近では計算論，あるいは計算可能性理論と呼ばれている分野を指している．以降はこれらの用語を区別せず用いる．

1 必要となる定義や事実集

1.1 算術の言語と論理式

定義 1.1 ($\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_1$)**.** 二階算術の言語 L_2 は次．

- 数変数 $x, y, n, m, a, b, ...$
- 集合変数 $X, Y, U, V, A, B, ...$
- 定数記号 $0, 1$
- 二変数関数記号 $+, \cdot$
- 二変数関係記号 $<, \in$

L_2 から集合変数と $\in$ を抜いたのが一階算術の言語 L_1 である．数変数と $0, 1, +, \cdot$ からなる項を数項という．また，集合変数として高々 X のみが含まれて，もし実際に X が含まれる場合には自由変数として含まれる L_2 論理式を $\mathrm{L}_2(X)$ 論理式[*2]と表現する．

t, s を数項として $t < s, t \in X, t = s$ の三種類が L_2 の原子論理式．これらは $\mathrm{L}_2(X)$ 論理式の例でもある．その他よく使われる略記として，$\overline{x}$ と書いて有限個の変数列 $x_1, ..., x_k$ を表す．この略記は任意有限長さを表したいとき，もしくは文脈から特定できるときに用いる．

もう少し略記を定義する．

定義 1.2. 以下の表で t は x を含まない数項とし，$x \leq y$ は $x < y \vee x = y$ の略記とする．この表に現れるような数変数の量化のことを有界（*bounded*）な数量化という．そうでない数量化を非有界量化という．

[*2] これはあまり一般的な表記法ではない．

略記	正式
$\forall x < t(...)$	$\forall x(x < t \to ...)$
$\forall x \leq t(...)$	$\forall x(x \leq t \to ...)$
$\exists x < t(...)$	$\exists x(x < t \wedge ...)$
$\exists x \leq t(...)$	$\exists x(x \leq t \wedge ...)$

定義 1.3 (Δ^0_0 論理式)**.** L_2 論理式 θ が Δ^0_0 であるとは，集合変数の量化を含まず，その論理式に含まれる数変数の量化がすべて有界であることをいう．

定義 1.4 ($\Sigma^0_k, \Pi^0_k, \Sigma^1_k, \Pi^1_k$ 論理式)**.** L_2 論理式のうち，$\Sigma^0_k, \Pi^0_k, \Sigma^1_k, \Pi^1_k$ 論理式とよばれるものはそれぞれ以下のようにその形によって定義される．

$$
\begin{array}{ll}
\Sigma^0_k \cdots \exists x_1 \forall x_2, ..., Q x_k \theta & \text{where } \theta \in \Delta^0_0 \\
\Pi^0_k \cdots \forall x_1 \exists x_2, ..., Q x_k \theta & \text{where } \theta \in \Delta^0_0 \\
\Sigma^1_k \cdots \exists X_1 \forall X_2, ..., Q X_k \varphi & \text{where } \varphi \in \Sigma^0_n \text{ for some } n \in \omega \\
\Pi^1_k \cdots \forall X_1 \exists X_2, ..., Q X_k \varphi & \text{where } \varphi \in \Sigma^0_n \text{ for some } n \in \omega
\end{array}
$$

集合変数を含まない Σ^0_1 論理式[*3]を Σ_1 論理式とよぶ．Π_1 も同様に定める．

定義 1.5. 二階算術の形式的体系 RCA_0 は次の無限個の公理からなる．

- PA^-

  Ax1 $\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))$

  Ax2 $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

  Ax3 $\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

  Ax4 $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

  Ax5 $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

  Ax6 $\forall x((x + 0 = x) \wedge (x \cdot 0 = 0))$

  Ax7 $\forall x(x \cdot 1 = x)$

  Ax8 $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$

  Ax9 $\forall x(\neg(x < x))$

  Ax10 $\forall x \forall y(x < y \ \vee \ x = y \ \vee \ y < x)$

  Ax11 $\forall x \forall y \forall z(x < y \to x + z < y + z)$

  Ax12 $\forall x \forall y \forall z(0 < z \wedge x < y \to x \cdot z < y \cdot z)$

  Ax13 $\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x + z = y))$

  Ax14 $0 < 1 \wedge \forall x(x > 0 \to x \geq 1)$

  Ax15 $\forall x(x \geq 0)$

[*3] 定義からこれは L_1 論理式.

- $[\varphi(0) \land \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1))] \to \forall n \varphi(n)$[*4] ここで φ は Σ^0_1 論理式
- $\forall n(\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n)) \to \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$ ここで φ は Σ^0_1，ψ は Π^0_1 論理式でどちらにも X は自由に現われない．

下二つをそれぞれ Σ^0_1 帰納法公理図式，Δ^0_1 内包公理図式とよぶ．

定義 1.6. L_2 論理式 ϕ が $\Sigma^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ であるとは，以下を満たす Σ^0_1 論理式 φ が存在することと定める．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \phi \leftrightarrow \varphi$$

$\Delta^0_0(\mathrm{RCA}_0)$ や $\Pi^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ も同様に定義する．また L_2 論理式 ϕ が $\Delta^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ であるとは，それが $\Sigma^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ かつ $\Pi^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ であることと定める．$\Sigma_1(\mathrm{RCA}_0)$ や $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ も同様に定める．

定義 1.7. L_2 論理式 ϕ が Σ^0_1(メタ) であるとは，以下を満たす Σ^0_1 論理式 φ が存在することと定める．

$$\phi \Leftrightarrow \varphi$$

Π^0_1(メタ) や Δ^0_1(メタ) も同様に定める．

$\Sigma^0_1(hoge)$ 中の $hoge$ は文脈から明らかなことが多いので以降では省略する．例えば定理 1.22 の主張に含まれる Σ^0_1 は Σ^0_1(メタ) である．

命題 1.8. 次がすべて成り立つ．

1. $\Delta^0_0(\mathrm{RCA}_0)$ は有界数量化・$\neg$・$\land$・$\lor$ に閉じる．
2. $\Sigma^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ は有界数量化・非有界存在量化・$\land$・$\lor$ に閉じる．
3. $\Pi^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ は有界数量化・非有界全称量化・$\land$・$\lor$ に閉じる．
4. $\Delta^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ は有界数量化・$\neg$・$\land$・$\lor$ に閉じる．

証明. 非自明なのは 2 と 3 の有界量化の部分である．詳しくは付録の 3.1 節を見よ． □

1.2 計算可能関数・計算可能集合

定義 1.9. $n \geq 1, S \subseteq \omega^n$ とし，$f \subseteq S \times \omega$ は各 $\overline{x} \in S$ ごとにちょうど一つの $y \in \omega$ で $(\overline{x}, y) \in f$ が成り立つとする．

- $\overline{x} \in S$ について，$(\overline{x}, y) \in f$ なるただ一つの y を $f(\overline{x})$ と書く．
- f を ω^n から ω への部分関数 $(partial function)$ といい，$f : \omega^n \to \omega$ と書く[*5]．
- $\mathrm{dom}(f) = S$ とし，f の定義域 $(domain)$ と呼ぶ．
- $\mathrm{rng}(f) = \{\, f(\overline{x}) \in \omega \mid \overline{x} \in S \,\}$ とし，f の値域 $(range)$ と呼ぶ．

[*4] 形式的にはこれの全称閉包である．次も同様．今後はこのように注釈をつけない．
[*5] あまり一般的ではないように感じるが，$f :\subseteq \omega^n \to \omega$ と表記する流儀もある．

- $\overline{x} \in \omega^n$ とする．$\overline{x} \in S$ のことを $f(\overline{x})\downarrow$ と表す．反対に $\overline{x} \notin S$ のこと，f は $\overline{x}$ において未定義であるといい $f(\overline{x})\uparrow$ と表す．
- $\omega^n = S$ のときは特に f を全域関数 ($total function$) と呼ぶ．

正方形が長方形の一種であるのと同様，全域関数は部分関数の一種である．

定義 1.10. $f, g : \omega^n \to \omega$ を部分関数とする．$\overline{x} \in \omega$ について，次のどちらかが成り立つとき $f(\overline{x}) \simeq g(\overline{x})$ と表記する．

(1) $\overline{x} \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ かつ $f(\overline{x}) = g(\overline{x})$．
(2) $\overline{x} \notin \mathrm{dom}(f) \cup \mathrm{dom}(g)$

命題 1.11. $f, g : \omega^n \to \omega$ を部分関数とする．各 $\overline{x} \in \omega$ について次の二つが同値．

- $f(\overline{x}) \simeq g(\overline{x})$
- $\forall y((\overline{x}, y) \in f \Leftrightarrow (\overline{x}, y) \in g)$

定義 1.12. $\mathscr{C}$ を以下 (a) から (d) を満たす最小の部分関数の集合と定める．

(a) $\mathscr{C}$ は以下で定義されるゼロ関数・後者関数・射影関数を含む．

$$0(x) := 0 \ (x \in \omega)$$
$$S(x) := x + 1 \ (x \in \omega)$$
$$\text{各 } 1 \leq i \leq n \in \omega \text{ごとに } U_i^n(x_1, x_2, ..., x_n) := x_i \ (x_1, ..., x_n \in \omega)$$

ゼロ関数は単に 0 と書かれることが多い．

(b) $\mathscr{C}$ は合成（$composition$）に閉じる．つまり $f(x_1, x_2, ..., x_k), g_1(\overline{y}), ..., g_k(\overline{y}) \in \mathscr{C}$ ならば以下で定義される h を $\mathscr{C}$ は含む．

$$h(\overline{y}) := \begin{cases} f(g_1(\overline{y}), g_2(\overline{y}), ..., g_k(\overline{y})) & \text{if すべての } i \leq k \text{ について } g_i(\overline{y})\downarrow \\ \text{未定義} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(c) $\mathscr{C}$ は原子再帰（$primitive\ recursion$）に閉じる．つまり $f(\overline{x}), g(\overline{x}, y, z) \in \mathscr{C}$ ならば以下で定義される h を $\mathscr{C}$ は含む．

$$h(\overline{x}, 0) := f(\overline{x})$$
$$h(\overline{x}, y + 1) := \begin{cases} g(\overline{x}, y, h(\overline{x}, y)) & \text{if } h(\overline{x}, y)\downarrow \\ \text{未定義} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(d) $\mathscr{C}$ は最小化（$minimalization$）に閉じる．つまり $g(\overline{x}, y) \in \mathscr{C}$ ならば以下で定義される h を $\mathscr{C}$ は含む．

$$h(\overline{x}) := \begin{cases} \text{そのような最小の } y & \text{if } \begin{array}{l} g(\overline{x}, 0)\downarrow, g(\overline{x}, 1)\downarrow, ..., g(\overline{x}, y)\downarrow \\ \text{かつ } g(\overline{x}, y) = 0 \text{ となる } y \text{ が存在する．} \end{array} \\ \text{未定義} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このように定まる h を $h(\overline{x})=(\mu y)(g(\overline{x},y)=0)$ と書く．

また，上記 $(a),(b),(c)$ を満たす最小の集合を $\mathscr{PR}$ と定める．

定義 1.13. $\mathscr{C}$ に属する部分関数のことを計算可能（*computable*），あるいは再帰的（*recursive*）関数という[*6]．同様に $\mathscr{PR}$ に属する関数を原始再帰的（*primitive recursive*）関数という．

定義 1.14. 集合 $A\subseteq\omega^k$ が計算可能であるとは，その特性関数

$$\chi_A(\overline{x})=\begin{cases}1 & \text{if } \overline{x}\in A\\ 0 & \text{if } \overline{x}\notin A\end{cases}$$

が計算可能であることをいう．集合 A が原子再帰的であることも，同様にその特性関数が原子再帰的であることと定める．

定義 1.15. 集合 $A\subseteq\omega^k$ が計算可能に枚挙可能（*computably enumerable*，*c.e.* と略記する）[*7]であるとは，ある計算可能関数 f について $A=\mathrm{dom}(f)$ が成り立つことと定める．

定理 1.16. $f:\omega^k\to\omega$ を部分関数とする．このとき，f が再帰的であることと，

$$f(\overline{x})=y\Leftrightarrow\varphi(\overline{x},y)\text{ for all }\overline{x},y\in\omega$$

が成り立つ L_1 の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x},y)$ が存在することは同値である．

証明. 付録の定理 3.27 を見よ． □

系 1.17 (Post の定理)**.** $A\subseteq\omega^k$ とする．このとき，A が再帰的であることと，

$$\overline{x}\in A\Leftrightarrow\varphi(\overline{x})\Leftrightarrow\psi(\overline{x})\text{ for all }\overline{x}\in\omega$$

が成り立つ L_1 の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x})$，Π_1 論理式 $\psi(\overline{x})$ が存在することは同値である．

1.3 相対化された計算可能性

$A\subseteq\omega$ とする．

定義 1.18. $\mathscr{C}^A$ を以下 (a) から (d) を満たす最小の部分関数の集合と定める．

(a) $\mathscr{C}^A$ はゼロ関数・後者関数・射影関数および A の特性関数を含む．
(b) $\mathscr{C}^A$ は合成に閉じる．
(c) $\mathscr{C}^A$ は原子再帰に閉じる．

[*6] 大抵のテキストでは以上で定義される関数は再帰的関数，あるいは帰納的関数として導入される．そしてそれとは別に Turing 機械などの計算モデルでシミュレートできる関数を計算可能関数とよび，その後部分関数が再帰的であることと計算可能であることの同値性が示される．

[*7] recursively enumerable，r.e. と略記されることもある．

(d) $\mathscr{C}^A$ は最小化に閉じる．

定義 1.19. $\mathscr{C}^A$ に属する部分関数のことを A 計算可能という．

定義 1.20. 集合 $B \subseteq \omega^k$ が A 計算可能であるとは，その特性関数が A 計算可能であることと定め $B \leq_{\mathrm{T}} A$ と表記する．

定義 1.21. 集合 $B \subseteq \omega^k$ が A 計算可能に枚挙可能であるとは，ある A 計算可能関数 f について $B = \mathrm{dom}(f)$ が成り立つことと定める．

定理 1.22. $f : \omega^k \to \omega$ を部分関数とする．このとき，f が A 計算可能であることと，

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y, A) \text{ for all } \overline{x}, y \in \omega$$

が成り立つ $\mathrm{L}_2(X)$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y, X)$ が存在することは同値である．

系 1.23 (相対化された Post の定理)**.** $B \subseteq \omega^k$ とする．このとき，B が A 再帰的であることと，

$$\overline{x} \in B \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}, A) \Leftrightarrow \psi(\overline{x}, A) \text{ for all } \overline{x} \in \omega$$

が成り立つ $\mathrm{L}_2(X)$ の Σ^0_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, X)$，Π^0_1 論理式 $\psi(\overline{x}, X)$ が存在することは同値である．

関数や集合が $\varnothing$ 計算可能であることと，計算可能であることは同値なので，本稿では相対化したもののみを RCA_0 上で定式化する．

Turing functional の通常の計算可能性理論における定義も紹介したかったのだが，紹介のためだけに具体的な計算モデルのコード化をここで実演するのは労多くして功少しだと思うので，詳細は適当な計算論のテキストを参照して欲しい．

1.4 RCA_0 で使える便利な道具たち

RCA_0 で Turing functional の定義を定義する際に必要となる便利な（そして証明が大変な）道具をここにまとめておく．この節以降，定義や定理などの右に書いてある（RCA_0）はそれらが RCA_0 内部でなされていることを意味する．また $\mathbb{N}$ は体系内部の自然数全体（論理式 $n = n$ に Δ^0_1 内包公理を適用して得られる）を表し，メタの自然数全体の ω とは区別する．

次は形式的体系の中で有限列のコード/デコードを扱うための関数である．

補題 1.24 (RCA_0)**.** 以下をすべて満たすような 2 変数関数 $(x)_y$ が存在する．

(a) $\forall x, y \exists ! z((x)_y = z)$
(b) $\forall x, y((x)_y \leq x)$
(c) $\forall x \exists y((y)_0 = x)$
(d) $\forall x, y, z \exists w((\forall i < z (w)_i = (y)_i) \wedge (w)_z = x)$

上の 4 つの条件を満たせば $(x)_y$ の具体的構成方法はなんでもよい．(d) がコードの延長に関わ

る一番重要な性質である．

定義 1.25 (RCA$_0$)**.** 関数 $\mathrm{lh}(x)$ と $[x]_y$ を以下によって定める．

- $\mathrm{lh}(x) = y :\leftrightarrow (x)_0 = y$
- $[x]_y = z :\leftrightarrow (y \geq \mathrm{lh}(x) \land z = 0) \lor (y < \mathrm{lh}(x) \land (x)_{y+1} = z)$

$[x]_y$ は一番最初の元を長さと見なしてデコードを行う関数である．

命題 1.26 (RCA$_0$)**.** 任意の $X \subseteq \mathbb{N}$ と $n \in \mathbb{N}$ について以下を満たす $\sigma \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\mathrm{lh}(\sigma) = n \land \forall i < n((i \in X \to [\sigma]_i = 1) \land (i \notin X \to [\sigma]_i = 0)) \tag{1.1}$$

証明. X を固定し，n に関する帰納法で $\forall n \exists \sigma[\sigma$は式 1.1 を満たす$]$ を示せばよい．$n = 0$ のときは補題 1.24 の (c) を，インダクションステップでは (d) を用いればよい． □

定義 1.27 (RCA$_0$)**.** $X \subseteq \mathbb{N}$ と $n \in \mathbb{N}$ について，先の命題の式 1.1 を満たす最小[*8]の σ を X（の特性関数）の長さ n 切片とよび，$X[n]$ で表す．

最小性によって X の長さ n 切片のコードを一意的にしている．

定理 1.28 (Σ^0_1 正規形定理)**.** 任意の Σ^0_1 論理式 $\varphi(X)$ について，以下を満たす Δ^0_0 論理式 $\theta(s)$ が存在する[*9]．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall X(\varphi(X) \leftrightarrow \exists n \theta(X[n]))$$

証明. 付録の 3.4 節に書いた． □

$X[n]$ のように，論理式 $\theta(z)$ を満たす最小の z を hoge とする，という形で何かを定義したいという状況は多い．そこで一つ構文糖衣を導入する．

構文糖衣 1.29. 「$hoge := \min\{\, z \mid \theta(z) \,\}$」と書いて，$\theta(z)$ を満たす最小の z を $hoge$ とする，を意味するとする．

例えば定義 1.27 は $X[n] := \min\{\, \sigma \mid$ 式 1.1 $\}$ のように書ける．

命題 1.30. 各 $n \in \omega$ に対し，次が成り立つ．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x_0, ..., x_{n-1} \exists z(\mathrm{lh}(z) = n \land [z]_0 = x_0 \land [z]_1 = x_1 \land \cdots \land [z]_{n-1} = x_{n-1})$$

証明. $(x)_y = z$ の条件 (d) から分かる． □

---

*8 任意の $\Sigma^0_1 \cup \Pi^0_1$ の論理式 $\varphi(n)$ について $\mathrm{RCA}_0 \vdash \exists n \varphi(n) \to \exists n(\varphi(n) \land \forall n' < n \neg\varphi(n'))$ が正しい．cf.3.1 節

*9 $\exists n \theta(X[n])$ とは形式的には $\exists n \exists \sigma(\sigma = X[n] \land \theta(\sigma))$ であり，これは $\exists n \forall \sigma(\sigma = X[n] \to \theta(\sigma))$ と同値である．また，最大値が m であるような長さ n の有限列のコードの上界を与える関数 $F(m, n)$ が RCA_0 で定義できるので，実際には $\exists \sigma...$ の箇所は有界量化にできる．もっとも，0-1 列に限定した有限列のコード化に限れば二進数を用いる方法が代表的で定義もしやすく，そちらは長さ n の 0-1 列全体の上界に 2^n を使える．

定義 1.31 (RCA$_0$，メタ有限個の自然数のコード)**.** 各 $n \in \omega$ に対し，

$$[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] := \min\{\, z \mid \mathrm{lh}(z) = n \wedge [z]_0 = x_0 \wedge [z]_1 = x_1 \wedge \cdots \wedge [z]_{n-1} = x_{n-1} \,\}$$
$$[] := \min\{\, z \mid \mathrm{lh}(z) = 0 \,\}$$

以下はゲーデル数の形式的な定義を与えてはじめて意味をなす．ここに書くには少し長くなりすぎるので，以下で説明する直感的なアイデアの形式化については付録の 3.5 節を参照して欲しい．

命題 1.32. 以下を満たすような $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式 $\mathrm{term}(x)$ と $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ が存在する．

- $\forall t[\mathrm{term}(t) \leftrightarrow (t = \ulcorner 0 \urcorner \vee t = \ulcorner 1 \urcorner \vee \exists j \leq t(t = \ulcorner \mathsf{v}_j \urcorner) \vee$
  $\exists r, s \subseteq_{\mathrm{p}} t(\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge (t = \ulcorner (r+s) \urcorner \vee t = \ulcorner (r \cdot s) \urcorner))]$
- $\forall x\{\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \leftrightarrow [\exists t, s(\mathrm{term}(t) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge (x = \ulcorner (r = s) \urcorner \vee x = \ulcorner (r < s) \urcorner)) \vee$
  $\exists y, z(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(z) \wedge (x = \ulcorner (y \wedge z) \urcorner \vee x = \ulcorner (y \vee z) \urcorner)) \vee$
  $\exists y(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y)) \vee$
  $\exists y, u(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y) \wedge \mathrm{term}(u) \wedge$ $(\exists k \leq x(\ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \wedge$
  $(x = \ulcorner (\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge y)) \urcorner \vee x = \ulcorner (\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k < u)) \vee y)) \urcorner))))]\}$

ただしここで $\ulcorner hoge \urcorner$ は *hoge* という文字列のゲーデル数（文字列を自然数でエンコードしたもの）である．$x \in_c y$ は”文字列 y 中に文字 x 字が含まれる”という関係を定式化したものであり，$x \subseteq_{\mathrm{p}} y$ は”文字列 x 中に文字列 y 字が含まれる”を定式化したものである．

定理 1.33. 以下を満たす $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式 $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$ が存在する．

任意の Δ_0 論理式 $\theta(x_0, ..., x_{n-1})$（論理式に含まれる自由変数は $x_0, ..., x_{n-1}$ のみ）に対して以下が成り立つ．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall a_0, ..., a_{n-1}(\theta(a_0, ..., a_{n-1}) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta(x_0, ..., x_{n-1}) \urcorner, [a_0, ..., a_{n-1}]))$$

ただしここで $\ulcorner \theta(x_0, ..., x_{n-1}) \urcorner$ は $\theta(x_0, ..., x_{n-1})$ のメタにおけるゲーデル数．

証明. 付録の 3.5 節で詳細な証明を与えた． □

直感的には $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta(x_0, ..., x_{n-1}) \urcorner, [a_0, ..., a_{n-1}])$ は”論理式 θ の $x_0, ..., x_{n-1}$ にそれぞれ $a_0, ..., a_{n-1}$ を代入したものが正しい”を意味する．

2 RCA$_0$ で動作する Turing functional を作る

2.1 計算可能性に関する諸定義の RCA$_0$ 内部での表現方法

前の節でメタにおいて議論した計算可能性に関する様々な概念を RCA$_0$ の中で形式化していく．

定義 2.1 (RCA$_0$)．メタ有限個の数のペアリング関数を以下のように定める．

$$(i,j) = (i+j)^2 + i$$
$$(i_1, ..., i_{n+1}) = ((i_1, i_2, ..., i_n), i_{n+1}) \quad \text{where } 1 \le n \in \omega$$

そして集合 $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ について直積を以下で定める[*10]．

$$X \times Y := \{ (i,j) \mid i \in X \wedge j \in Y \}$$
$$X^{n+1} := X^n \times X \quad \text{where } 1 \le n \in \omega$$

定義 2.2 (RCA$_0$)．$k \in \omega$ とする．以下を満たす $f \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$ を k 変数部分関数とよび，$f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ と表記する[*11]．

$$\forall x_1, ..., x_k, y, y'((x_1, ..., x_k, y) \in f \wedge (x_1, ..., x_k, y') \in f \to y = y')$$

部分関数 f についても通常の全域関数と同様に $(x_1, ..., x_k, y) \in f$ なる（唯一の）y が存在するとき，その y を $f(x_1, ..., x_k)$ で表す．

定義 2.3 (RCA$_0$)．f, g を k 変数部分関数とし，$\overline{x} \in \mathbb{N}$ とする．

- f が $\overline{x}$ で定義されているとき，すなわち $\exists y((\overline{x}, y) \in f)$ が成り立つとき $f(\overline{x})\downarrow$ と書く．
- f が $\overline{x}$ で定義されていないとき $f(\overline{x})\uparrow$ と書く．
- $f(\overline{x}) \simeq g(\overline{x})$ を $\forall y(f(\overline{x}) = y \leftrightarrow g(\overline{x}) = y)$ の略記とする（*cf.1.11*）．

定理 1.22 をもとに，次のように定める．

定義 2.4 (RCA$_0$)．$A \subseteq \mathbb{N}$ とする．k 変数部分関数 f が A 上再帰的である[*12]とは，ある $\mathrm{L}_2(X)$ の Σ^0_1 論理式 $\varphi(z, \overline{x}, y, X)$ があって次を満たすことと定める．

$$\exists e \forall \overline{x}, y(f(\overline{x}) = y \leftrightarrow \varphi(e, \overline{x}, y, A))$$

上の式で $\exists e...$ とついていることに違和感を覚えるかもしれない．実際，メタでは全ての自然数が数項 $\underbrace{1+1+\cdots 1}_{n\text{ 個}}$ という形で処理できるために付ける必要はない．しかし超準モデルでは数項で表せない自然数が存在するので，自然数パラメータを許すためにはこう書かざるを得ないのである．

このままでは RCA$_0$ 上で扱える部分関数が少なすぎるので，議論の対象範囲を広げるために部分関数の概念をクラスへ一般化しておく．

[*10] $X \times Y$ は正確には，$\exists i, j \le z(z = (i,j) \wedge i \in X \wedge j \in Y)$ という論理式に内包公理を適用して作る．

[*11] これも形式的には

[*12] ここを計算可能ではなく再帰的と書いたのは意図的である．というのも，RCA$_0$ の可算超準モデル M において $+^M\colon M^2 \to M$ は M の可算性から自然数上の部分関数を誘導するが，テンネンバウムの定理によりそれは計算可能になり得ないのである．そのため，ここで計算可能という用語を使ってしまうと，それが定める自然数上の関数は計算可能ではないが，計算可能である関数が誕生してしまう．この状況を回避するために用語を分けておきたいのである．

定義 2.5 (RCA$_0$)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$ とし，以下のように部分クラス関数とそれに関連する構文糖衣を定める．

1. $\varphi(x_1, ..., x_k, y)$ を L_2 の論理式（他にパラメータを含んでもよい）とし，

$$\forall \overline{x}, y, y'(\varphi(\overline{x}, y) \land \varphi(\overline{x}, y') \to y = y')$$

   が正しいとする．このとき $\varphi(\overline{x}, y)$ を（$\overline{x}$ に関する）k 変数の部分クラス関数[*13]とよぶ．さらに φ が集合パラメータとして A のみを含む Σ^0_1 論理式であるとき，$\varphi(\overline{x}, y)$ を A 再帰的部分クラス関数とよぶ．
2. 「f は k 変数の部分クラス関数」と書いたとき，それは何かしら具体的な L_2 論理式に適当な数パラメータが代入された $\phi(x_1, ..., x_k, y)$ を指して f と名付けているとする．その上で $f(\overline{x}) = y$ を $\phi(\overline{x}, y)$ の略記とし，$\phi(\overline{x}, y)$ なる y がもしあればそれを $f(\overline{x})$ と表記する．
3. 部分クラス関数 f は，対応する論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ から内包公理によって集合 $\{ (\overline{x}, y) \mid \varphi(\overline{x}, y) \}$ が定まるときは論理式ではなくその集合を指すとする．

部分クラス関数についても $f(\overline{x})\downarrow$ などは定義 2.3 と同様に定める．

2.2 RCA$_0$ 上での Turing functional の定式化

まずアイデアを説明するためにメタで議論する．$A \subseteq \omega$ について部分関数 $f\colon \omega^k \to \omega$ が A 計算可能であるなら，定理 1.22 からある $\mathrm{L}_2(X)$ の Σ^0_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y, X)$ で

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y, A) \quad \text{for all } \overline{x}, y \in \omega$$

となる．そして Σ^0_1 正規形定理によって次を満たす Δ^0_0 論理式 $\theta(s)$ が見つかる．

$$\varphi(\overline{x}, y, A) \Leftrightarrow \exists n \theta(\overline{x}, y, A[n]) \quad \text{for all } \overline{x}, y \in \omega$$

このとき以下のように同値変形できる．

$$\begin{aligned}
\exists n \theta(\overline{x}, y, A[n]) &\Leftrightarrow \exists n \theta(\overline{x}, y, A[n]) \\
&\Leftrightarrow \exists s((s)_0 = y \land \theta(\overline{x}, (s)_0, A[(s)_1])) \\
&\Leftrightarrow \exists s((s)_0 = y \land \theta(\overline{x}, (s)_0, A[(s)_1]) \land \forall s' < s \neg \theta(\overline{x}, (s')_0, A[(s')_1])) \quad \text{for all } \overline{x}, y \in \omega
\end{aligned}$$

最後の同値の $(\Rightarrow)$ では f が部分関数であること，つまり $\overline{x}$ ごとに $\exists n \theta(\overline{x}, y, A[n])$ を満たす y が高々一つであることを使っている．したがって Sat_{Δ_0} の性質から，θ のゲーデル数 e をとることで結局次が成り立つ．

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \exists s[(s)_0 = y \land \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e, [\overline{x}, y, A[(s)_1]]) \land \forall s' < s \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e, [\overline{x}, (s')_0, A[(s')_1]])]$$

そこで RCA$_0$ 上で Turing functional を定める予定の論理式を次のようにする．

[*13] この用語は一般的ではない．

定義 2.6. 各 $k \geq 1$ ごとに，以下の $k+2$ 個の数変数を含んだ $\mathrm{L}_2(X)$ の $\Sigma^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式を $\Phi(z, x_1, ..., x_k, y, X)$ と表記する．

$$\exists s[(s)_0 = y \wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(z, [x_1, ..., x_k, y, X[(s)_1]]) \wedge \forall s' < s \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(z, [x_1, ..., x_k, (s')_0, X[(s')_1]])]$$

命題 2.7 (RCA_0)**.** 各 $A \subseteq \mathbb{N}$ に対し，$\Phi(z, x_1, ..., x_k, y, A)$ は $k+1$ 変数の A 再帰的部分クラス関数である．

証明. $\overline{x}, y, y'$ が以下を満たすとする．

$$\exists s[(s)_0 = y \wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e, [x_1, ..., x_k, y, A[(s)_1]]) \wedge \forall s' < s \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e, [x_1, ..., x_k, (s')_0, A[(s')_1]])]$$
$$\exists s[(s)_0 = y' \wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e, [x_1, ..., x_k, y', A[(s)_1]]) \wedge \forall s' < s \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e, [x_1, ..., x_k, (s')_0, A[(s')_1]])]$$

このとき定義から s_0, s_1 でそれぞれ上，下の $[\cdots]$ の中身を満たすものがとれる．このとき $s_0 < s_1$ としても $s_1 < s_0$ としてもいずれかの最小性に矛盾するので $s_0 = s_1$．よって特に $y = y'$ である， □

定義 2.8 (RCA_0)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$ について，論理式 $\Phi(z, x_1, ..., x_k, y, A)$ によって定まる $k+1$ 変数 A 再帰的部分クラス関数を $\Phi^A_z(x_1, ..., x_k)$ と表記する．

系 2.9 (RCA_0)**.** 各 $A \subseteq \mathbb{N}$，$e \in \mathbb{N}$ について $\Phi^A_e(x_1, ..., x_k)$ は k 変数の A 再帰的部分クラス関数.

注 2.10. RCA_0 ではなく ACA_0 上でなら各 $A \subseteq \mathbb{N}$ について集合 $\{ (z, \overline{x}, y) \mid \Phi^A_z(\overline{x}) = y \}$ が存在するため，Φ^A_z をクラスを外して部分関数とよぶことができる．

計算の有限ステップによる議論がしたければ次のように定めればよい．

定義 2.11 (RCA_0)**.** $\Phi^\sigma_{e,t}(\overline{x})$ を次で定まる部分関数とする．

$$\begin{aligned}\Phi^\sigma_{e,t}(\overline{x}) = y \leftrightarrow \exists s \leq t[(s)_0 = y \wedge (s)_1 \leq \mathrm{lh}(\sigma) \wedge & \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e, [x_1, ..., x_k, y, \sigma \upharpoonright (s)_1]) \\ & \wedge \forall s' < s \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e, [x_1, ..., x_k, (s')_0, \sigma \upharpoonright (s')_1])]\end{aligned}$$

右辺は $\Delta^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ なので RCA_0 で集合として存在することに注意．ここで $x \upharpoonright y := \min \{ w \mid \mathrm{lh}(w) = y \wedge \forall i < \mathrm{lh}(w)([w]_i = [x]_i) \}$ である．

これが部分関数を定めることの証明は Φ^A_e と全く同様である．また RCA_0 において

$$\Phi^\sigma_{e,t}(\overline{x}) \downarrow \leftrightarrow \exists y(\Phi^\sigma_{e,t}(\overline{x}) = y) \leftrightarrow \exists y \leq t(\Phi^\sigma_{e,t}(\overline{x}) = y) \quad \text{for all } \sigma, e, t \in \mathbb{N}$$

なので $\Phi^\sigma_{e,t}(\overline{x}) \downarrow$ も $\Delta^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ である．

命題 2.12 (RCA_0)**.** 任意の $A \subseteq \mathbb{N}, e, x_1, ..., x_k, y \in \mathbb{N}$ について次の同値が成立する．

$$\Phi^A_e(\overline{x}) = y \leftrightarrow \exists \sigma \subseteq A \exists s \forall \tau \supseteq \sigma \forall t \geq s(\Phi^\sigma_{e,t}(\overline{x}) = y)$$

証明． $(\to)$ $\Phi_e^A(\overline{x})=y$ だとする．定義からある s で

$$(s)_0=y\wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e,[x_1,...,x_k,y,A[(s)_1]])\wedge\forall s'<s\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e,[x_1,...,x_k,(s')_0,A[(s')_1]])$$

が成り立つ．$\sigma:=A[(s)_1]$，とすれば $\forall\tau\supseteq\sigma\forall t\geq s\Phi_{e,t}^{\sigma}(\overline{x})=y$ は明らか．

$(\leftarrow)$ 明らか． □

2.3　動作確認その 1，正規形定理・S_n^m 定理・再帰定理 in RCA_0

以降では手にした Turing functional の簡単な動作確認を行う．まず何はともあれ満たすべきは（相対化された）正規形定理・S_n^m 定理・再帰定理の三つだろう．

定義 2.13 (RCA_0)**.** f を k 変数部分クラス関数とする．

$A\subseteq\mathbb{N},e,\overline{x}\in\mathbb{N}$ について $\Phi_e^A(x_1,...,x_k)\simeq f(x_1,...,x_k)$ を以下の略記とする．

$$\forall y(f(x_1,...,x_k)=y\leftrightarrow\Phi_e^A(\overline{x})=y)$$

定理 2.14 (RCA_0，形式化された S_n^m 定理)**.** n,m はメタの 1 以上の自然数とする．このとき，次を満たす（全域）再帰的関数 S_n^m が存在する．

$$\forall\overline{x},\overline{z}[\Phi^A_{S_n^m(e,z_1,...,z_m)}(x_1,...,x_n)\simeq\Phi_e^A(x_1,...,x_m,z_1,...,z_n)]$$

証明． 通常の S_n^m 定理の証明と同様に，これは Φ の具体的構成に立ち入る必要がある．

次を満たす $m+1$ 変数全域再帰的関数[*14]S_n^m が存在することを示せば十分．

$$\forall e,\overline{x},\overline{z}(\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S_n^m(e,z_1,...,z_m),[x_1,...,x_n])\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e,[x_1,...,x_n,z_1,...,z_m]))$$

$1\leq m\in\omega$ に関するメタの帰納法で，すべての $1\leq n\in\omega$ について条件を満たす S_n^m が存在することを示す．

<u>Base Step : $m=1$</u> 各 $n\in\omega$ について

$$S_n^1(e,k):=\begin{cases} e\text{ 中の自由な } v_{n+1} \text{ を } \underbrace{1+\cdots+1}_{k\text{ 個}} \text{ に変換したもの} & \text{if } \mathrm{form}_{\Delta_0}(e)\\ e+k & \text{otherwise}\end{cases}$$

とすればよい．形式的な議論は 3.6 節をみよ．ただ，どうしても Sat_{Δ_0} の構成に立ち入る必要があるので，一旦認めて先に進むことを推奨する．

<u>Induction Step :</u>

帰納法の仮定から，すべての $n\geq1$ に関して S_n^m が見つかっているので，$n\geq1$ について $S_n^{m+1}(e,k_1,...,k_m,k_{m+1}):=S_n^1(S_{n+1}^m(e,k_2,...,k_{m+1}),k_1)$ と定義できる．これが条件を満たすことの確認は容易である．

□

[*14] 再帰的な関数が全域的ならグラフが Δ_1^0 になるので RCA_0 で集合として存在する．

定理 2.15 (RCA$_0$．形式化された Kleene の正規形定理)．$A \subseteq \mathbb{N}$ とする．任意の k 変数 A 上再帰的部分クラス関数 f に対し，ある $e \in \mathbb{N}$ が存在して次を満たす．

$$\forall x_1, ..., x_k (f(x_1, ..., x_k) \simeq \Phi_e^A(x_1, ..., x_k))$$

この e を f の *A-recursive* インデックスという．

証明． f が k 変数の A 上再帰的部分クラス関数であることから，$\mathrm{L}_2(X)$ の Σ_1^0 論理式 $\varphi(x_1, ..., x_k, y, A, z)$（自由数変数も表示したもののみ）と数パラメータ e' があって $f(x_1, ..., x_k) = y$ は $\varphi(x_1, ..., x_k, y, A, e')$ で定義される．このとき定理 1.28（Σ_1^0 論理式の正規形定理）から以下を満たす Δ_0^0 論理式 θ が存在する．

$$\forall A \forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y, A, e') \leftrightarrow \exists m \theta(\overline{x}, y, A[m], e')) \tag{2.1}$$

ここで Φ のアイデアを説明したときと同じ議論によって任意の $\overline{x}, y$ について次が正しい．

$$\begin{aligned}
&f(\overline{x}) = y \\
&\leftrightarrow \exists m \theta(\overline{x}, y, A[m], e') \\
&\leftrightarrow \exists s[(s)_0 = y \land \theta(\overline{x}, y, A[(s)_1], e')] \\
&\leftrightarrow \exists s[(s)_0 = y \land \theta(\overline{x}, y, A[(s)_1], e') \land \forall s' < s \neg \theta(\overline{x}, (s')_0, A[(s')_1], e')] \\
&\leftrightarrow \exists s[(s)_0 = y \land \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta \urcorner, [\overline{x}, y, A[(s)_1], e']) \land \forall s' < s \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta \urcorner, [\overline{x}, (s')_0, A[(s')_1], e'])] \\
&\leftrightarrow \exists s[(s)_0 = y \land \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S_{k+2}^1(\ulcorner \theta \urcorner, e'), [\overline{x}, y, A[(s)_1]]) \land \forall s' < s \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S_{k+2}^1(\ulcorner \theta \urcorner, e'), [\overline{x}, (s')_0, A[(s')_1]])] \\
&\leftrightarrow \Phi_{S_{k+2}^1(\ulcorner \theta \urcorner, e')}^A(\overline{x}) = y
\end{aligned}$$

ゆえに $e = S_{k+2}^1(\ulcorner \theta \urcorner, e')$ が条件を満たす． $\square$

定理 2.16 (RCA$_0$．形式化された再帰的理)．$A \subseteq \mathbb{N}$ とする．任意の $k+1$ 変数 A 上再帰的部分クラス関数 $f(x_1, ..., x_k, y)$ に対し，ある $e \in \mathbb{N}$ が存在して次を満たす．

$$\forall x_1, ..., x_k (\Phi_e^A(x_1, ..., x_k) \simeq f(x_1, ..., x_k, e))$$

証明． 通常の再帰定理の証明がそのまま通る．$f(x_1, ..., x_k, S_k^1(z, z))$ は $k+1$ 変数の A 再帰的部分クラス関数ゆえ，形式化された正規形定理によって次をみたす $d \in \mathbb{N}$ がとれる．

$$\forall \overline{x}, z(\Phi_d^A(x_1, ..., x_k, z) \simeq f(x_1, ..., x_k, S_k^1(z, z)))$$

そこで $e = S_k^1(d, d)$ とおけば任意の $x_1, ..., x_k$ について

$$\begin{aligned}
\Phi_e^A(x_1, ..., x_k) &\simeq \Phi_{S_k^1(d,d)}^A(x_1, ..., x_k) \\
&\simeq \Phi_d^A(x_1, ..., x_k, d) \\
&\simeq f(x_1, ..., x_k, S_k^1(d, d)) \\
&\simeq f(x_1, ..., x_k, e)
\end{aligned}$$

$\square$

2.4 動作確認その 2，r.e. 集合・Turing 還元・Turing ジャンプ in RCA_0

以降も Turing functional にまつわる重要な定義や性質についてみていくが，最も基本的な命題以外は読者への演習問題という形で証明は省略した．

定義 2.17 (RCA_0)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$ とする．$B \subseteq \mathbb{N}$ が A 上 r.e. であるとは，高々表示した変数のみを自由変数にもつ Σ^0_1 論理式 $\varphi(z,n,X)$ があって次を満たすことと定める．

$$\exists e \forall n(n \in B \leftrightarrow \varphi(e,n,A))$$

命題 2.18 (Σ^0_1 論理式に関する普遍性)**.** $\varphi(x,n,X)$ は高々表示した変数のみを自由変数にもつ Σ^0_1 論理式とする．このとき次が成り立つ．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall e \exists e' \forall A \forall n(\varphi(e,n,A) \leftrightarrow \Phi^A_{e'}(n)\downarrow)$$

証明. $\varphi(z,n,X)$ が Σ^0_1 なので，ある Δ^0_0 の θ で $\varphi(z,n,X) = \exists y \theta(z,n,y,X)$ と書ける．ここで新たに Δ^0_0 論理式 θ' を

$$\theta'(z,n,y,X) \equiv \theta(z,n,y,X) \land \forall y' < y \neg\theta(z,y',n,,X)$$

とおけば，

$$\forall z,X,n,y,y'(\theta'(z,n,y,X) \land \theta'(z,n,y',X) \to y = y')$$

が成り立つ．この θ' について Σ^0_1 正規形定理 1.28 よりある Δ^0_0 論理式 θ'' で

$$\forall z,X,n,y(\theta'(z,n,x,X) \leftrightarrow \exists m\theta''(n,y,X[m],z))$$

を満たすものが見つかる．以上を整理すると，θ'' に関して次が正しい．

- $\forall z,X,n(\varphi(z,n,X) \leftrightarrow \exists y \exists m \theta''(n,y,X[m],z))$
- $\forall z,X,n,y,y'(\exists m\theta''(n,y,X[m],z) \land \exists m\theta''(n,y',X[m],z) \to y = y')$

ここで任意に $e \in \mathbb{N}$ をとって固定すると，定理 2.15 の証明と同じ議論で次が成り立つ．

$$\begin{aligned} \varphi(e,n,A) &\leftrightarrow \exists y \exists m \theta''(n,y,A[m],e) \\ &\leftrightarrow \exists y(\Phi^A_{S^1_3(\ulcorner\theta''\urcorner,e)}(n) = y) \\ &\leftrightarrow \Phi^A_{S^1_3(\ulcorner\theta''\urcorner,e)}(n)\downarrow \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

系 2.19 (Σ^0_1 論理式に関するパラメータについて一様な普遍性)**.** $\varphi(x,n,X)$ は高々表示した変数のみを自由変数にもつ Σ^0_1 論理式とする．このとき次が成り立つ．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \exists S \forall e \forall A \forall n(\varphi(e,n,A) \leftrightarrow \Phi^A_{S(e)}(n)\downarrow)$$

証明. 先の証明は実際にはこちらを示している． □

系 2.20 (RCA$_0$)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$ とする．A 上 r.e. な任意の $B \subseteq \mathbb{N}$ について，次を満たす $e \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\forall n(n \in B \leftrightarrow \Phi_e^A(n)\downarrow)$$

この e を B の r.e. インデックスとよび，B を W_e^A とも表記する．

定義 2.21 (RCA$_0$)**.** $A, B \subseteq \mathbb{N}$ について $B \leq_{\mathrm{T}} A$ は次を満たす $e \in \mathbb{N}$ が存在することと定め，その e を B の *A-recursive* インデックスとよぶ．

$$\forall n((n \in B \to \Phi_e^A(n) = 1) \land (n \notin B \to \Phi_e^A(n) = 0))$$

インデックスを明示したいときは $B \leq_{\mathrm{T}} A$ via e と表記することにする．

問題 2.22. 次を示せ．
$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall X(X \leq_{\mathrm{T}} X)$

定義 2.23 (RCA$_0$)**.** $A \subseteq \mathbb{N}$ とする．もし $\{\,(m, e) \mid \Phi_e^A(m)\downarrow\}$ が集合として存在するならそれを $\mathrm{TJ}(A)$ と書き，A の Turing ジャンプとよぶ．

インフォーマルには $\mathrm{TJ}(A) = \bigcup_{e \in \mathbb{N}} W_e^A \times \{e\}$ である．

問題 2.24. 次が RCA$_0$ で正しいことを示せ．

1. $\forall X, Y[X \leq_{\mathrm{T}} Y \leftrightarrow \exists e_0, e_1 \forall n(n \in X \leftrightarrow \Phi_{e_0}^Y(n)\downarrow \leftrightarrow \Phi_{e_1}^Y(n)\uparrow)$
2. $\forall Z, Y, X[Z \leq_{\mathrm{T}} Y \land Y \leq_{\mathrm{T}} X \to Z \leq_{\mathrm{T}} X]$

問題 2.25. 次が RCA$_0$ で正しいことを示せ．
$A \subseteq \mathbb{N}$ について $\mathrm{TJ}(A)$ が存在すると仮定する．このとき，任意の $\Sigma_1^0(X)$ 論理式 $\varphi(x, n, X)$ について，各 $e \in \mathbb{N}$ に対し集合 $\{\,n \mid \varphi(e, n, A)\,\}$ は存在し，それを B とおくと $B \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(A)$ が成り立つ．

問題 2.26. 以下が $\mathrm{ACA}_0 (:= \mathrm{RCA}_0 + \forall A \exists B(B = \mathrm{TJ}(A)))$ で正しいことを示せ．

$$\forall X, Y(Y \leq_{\mathrm{T}} X \to \mathrm{TJ}(Y) \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(X))$$

問題 2.27. $\theta(y, z, \overline{x}, X)$ を表示した変数のみを自由変数とする $\Delta_1^0(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式とする．以下が RCA$_0$ で正しいことを示せ．

$$\exists f \forall X, e, d, \overline{x} \left[\Phi_{f(e,d)}^X(\overline{x}) \simeq \begin{cases} \Phi_e^X(\overline{x}) & \text{if } \theta(e, d, \overline{x}, X) \\ \Phi_d^X(\overline{x}) & \text{otherwise} \end{cases} \right]$$

問題 2.28. $\varphi(y, \overline{x}, X)$ を表示した変数のみを自由変数とする $\Sigma_1^0(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式とする．以下が RCA$_0$ で正しいことを示せ．

$$\exists f \forall X, e, d, \overline{x} \left[\Phi_{f(e,d)}^X(\overline{x}) \simeq \begin{cases} \Phi_d^X(\overline{x}) & \text{if } \varphi(e, \overline{x}, X) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} \right]$$

問題 2.29. 以下が RCA_0 で正しいことを示せ．

1. $\exists f \forall X, Y, e[Y \leq_{\mathrm{T}} X \text{ via } e \to \forall n(n \in X \leftrightarrow \Phi^{Y}_{f(e,0)}(n)\downarrow \leftrightarrow \Phi^{Y}_{f(e,1)}(n)\uparrow)]$
2. $\exists g \forall X, Y, e_0, e_1[\forall n(n \in X \leftrightarrow \Phi^{Y}_{e_0}(n)\downarrow \leftrightarrow \Phi^{Y}_{e_1}(n)\uparrow) \to Y \leq_{\mathrm{T}} X \text{ via } g(e_0, e_1)]$
3. $\exists h \forall Z, Y, X, e, d[Z \leq_{\mathrm{T}} Y \text{ via } e \wedge Y \leq_{\mathrm{T}} X \text{ via } d \to Z \leq_{\mathrm{T}} X \text{ via } h(e, d)]$

問題 2.30. 以下が ACA_0 で正しいことを示せ．

$$\exists f \forall X, Y, e(X \leq_{\mathrm{T}} Y \text{ via } e \to \mathrm{TJ}(X) \leq_{\mathrm{T}} \mathrm{TJ}(Y) \text{ via } f(e))$$

以下の問を解くために他の問を解いている必要はない．

問題 2.31. Φ^X_z の定義を修正することで，以下の性質を満たす Σ^0_1 論理式 $\Phi(z, x_1, ..., x_n, X_1, ..., X_m)$（表示した変数のみを自由にもつ）を定義せよ．

$z, x_1, ..., x_n, X_1, ..., X_m$ のみを自由変数にもつ任意の Σ^0_1 論理式 φ について以下が成り立つ．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall e' \exists e \forall x_1, ..., x_n, X_1, ..., X_m[\varphi(e', x_1, ..., x_n, X_1, ..., X_m) \leftrightarrow \Phi(e, x_1, ..., x_n, X_1, ..., X_m)]$$

3 付録

3.1 Σ^0_1 帰納法のバリエーションと採集公理

この節の内容は Kaye [4] の 4.1，7.1 節を参考にしている．

定義 3.1. L_2 論理式 $\varphi(x)$（他に変数を含んでよい）に関して，下記のような形の論理式にそれぞれ名前を付ける．

帰納法公理	$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \varphi(x)$	(3.1)
z までの帰納法公理	$\forall z(\varphi(0) \wedge \forall x < z(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \leq z \varphi(x))$	(3.2)
最小値原理	$\exists x \varphi(x) \to \exists z(\varphi(z) \wedge \forall w < z \neg \varphi(w))$	(3.3)
累積帰納法公理	$\forall z((\forall w < z \varphi(w)) \to \varphi(z)) \to \forall x \varphi(x)$	(3.4)

ここで式 (3.1) の論理式を $I_x\varphi$，式 (3.2) の論理式を $U_x\varphi$，式 (3.3) の論理式を $L_x\varphi$，式 (3.4) の論理式を $T_x\varphi$ と表記する[*15]．ただし，帰納法変数が明らかなときは下付きの $_x$ を省略する．

これらが PA^- 上ですべて同値であることを確認しよう．

命題 3.2. $PA^- \cup \{ I_x\varphi \mid \varphi(x, \overline{y}) \text{ は } \mathrm{L}_2\text{論理式} \} \vdash \{ U_x\varphi \mid \varphi(x, \overline{y}) \text{ は } \mathrm{L}_2\text{論理式} \}$

証明. M を $PA^- \cup \{ I_x\varphi \mid \varphi(x) \text{ は } \mathrm{L}_2\text{論理式} \}$ の任意のモデルとする．任意にとった L_2 論理式 $\varphi(x)$ に対し，

$$M \models \forall z(\varphi(0) \wedge \forall x < z(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \to \forall x \leq z \varphi(x))$$

[*15] 記号の由来はそれぞれの英語にある．帰納法は Induction，z までの帰納法は Induction up to z，最小値原理は Least number principle，累積帰納法は Total induction の訳である．

を示せば完全性定理から結論が得られる．まず任意に $b \in M$ をとり，

$$M \models \varphi(0) \wedge \forall x < b(\varphi(x) \to \varphi(x+1)) \tag{3.5}$$

を仮定する．このとき $M \models \forall x \leq b\varphi(x)$ を示せば十分．ここで新たに L_2 論理式 ψ を以下で定める．

$$\psi(x,z) := (x \leq z \wedge \varphi(x)) \vee x > z$$

Claim $M \models \forall x\psi(x,b)$

まず式 (3.5) より $M \models 0 \leq b \wedge \varphi(0)$ であるので $M \models \psi(0,b)$ である．任意に $c \in M$ をとり $M \models \psi(c,b)$ と仮定する．まず $c+1 > b$ なら明らかに $M \models \psi(c+1,b)$ であるので $c+1 \leq b$ としてよい．このとき $c < b$ であるから，仮定 $M \models \psi(c,b)$ より $M \models \varphi(c)$ である．したがって式 (3.5) より $M \models \varphi(c+1)$ となるので $M \models \psi(c+1,b)$ が成り立つ．以上より $I_x\psi$ と合わせて $M \models \forall x\psi(x,b)$ が結論できる．Claim の証明終わり．

したがって任意の $M \ni x \leq b$ については $\neg x > b$ であるから $M \models \forall x \leq b\varphi(x,b)$ が成り立つ． □

以降で「任意にモデル M をとり... $M \models$ *hogehoge* を示して... 完全性定理から結論が従う」は省略し，明示的にモデルをとる議論をしないが，実際には「」の中身の議論を行っていることに注意せよ．

命題 3.3. $PA^- \cup \{\, U_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\,\} \vdash \{\, I_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\,\}$

証明. 任意にとった L_2 論理式 $\varphi(x)$ について

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$$

を仮定する．z を任意にとると，仮定から特に

$$\varphi(0) \wedge \forall x < z(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$$

が成り立つから，$U_x\varphi$ より $\forall x \leq z\varphi(x)$ が成り立ち，特に z について $\varphi(z)$ が得られる．ゆえに $\forall x\varphi(x)$ が確かめられた． □

命題 3.4. $PA^- \cup \{\, I_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\,\} \vdash \{\, T_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\,\}$

証明. 任意にとった L_2 論理式 $\varphi(x)$ について

$$\forall z((\forall w < z\varphi(w)) \to \varphi(z)) \tag{3.6}$$

を仮定する．ここで新たに L_2 論理式 ψ を以下で定める．

$$\psi(z) := \forall w < z\varphi(w)$$

$\forall x\varphi(x)$ のために $\forall z\psi(z)$ を示す．まず $\psi(0)$ は明らか．任意に c をとり $\psi(c)$ と仮定すると式 (3.6) より $\varphi(c)$ が成り立つ．したがって $\forall w < c+1\varphi(w)$ すなわち $\psi(c+1)$ が成り立つ．$I_x\psi$ と合わせて $\forall z\psi(z)$ を得る． □

命題 3.5. $PA^- \cup \{ T_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\} \vdash \{ I_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\}$

証明. 明らか. □

命題 3.6. $PA^- \cup \{ T_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\} \vdash \{ L_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\}$

証明. 対偶をとるだけである. □

命題 3.7. $PA^- \cup \{ L_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\} \vdash \{ T_x\varphi \mid \varphi(x)$ は L_2論理式$\}$

証明. 上と同様. □

定義 3.8. L_2 論理式 $\varphi(x)$ に関して，下記の形の論理式を φ の採集公理（*Collection axiom*）とよび，$B_x\varphi$ と表記する．

$$\forall t(\forall x < t \exists \overline{y} \varphi(x) \to \exists s \forall x < t \exists \overline{y} < s \varphi(x))$$

混乱が生じない限り下付きの $_x$ を省略し，$B\varphi$ と表記する．

注 3.9. $B\varphi$ の'逆',

$$\forall t(\exists s \forall x < t \exists \overline{y} < s \varphi(x) \to \forall x < t \exists \overline{y} \varphi(x))$$

は PA^- で正しい．

定義 3.10.

$$\begin{aligned} I\Sigma^0_1 &:= PA^- \cup \{ I_\varphi \mid \varphi \text{ は } L_2\text{の}\Sigma^0_1\text{論理式} \} \\ I\Pi^0_1 &:= PA^- \cup \{ I_\varphi \mid \varphi \text{ は } L_2\text{の}\Pi^0_1\text{論理式} \} \\ \mathrm{Coll}_1 &:= PA^- \cup \{ B_\varphi \mid \varphi \text{ は } L_2\text{の}\Sigma^0_1\text{論理式} \} \end{aligned}$$

この節では使わないが，次の命題と系は以降の節でよく使う．

命題 3.11. $\mathrm{RCA}_0 \vdash I\Pi^0_1$

証明. 任意にとった Π^0_1 論理式 $\psi(x)$ について

$$\psi(0) \land \forall x(\psi(x) \to \psi(x+1)) \tag{3.7}$$

と仮定する．示すべきは $\forall x \psi(x)$ であるが，もし仮に $\neg\psi(b)$ なる b が存在したとする．まず $\varphi(x, b)$ を次の $\Sigma^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式とする．

$$\exists y(y + x = b \land \neg\psi(y))$$

このとき $\forall x \le b \varphi(x, b)$ を示せば，$x = b$ として $\neg\psi(0)$ が導かれ矛盾が生じるので十分である．そのためには命題 3.2（の証明）から次を示せばよい．

$$\psi(0, b) \land \forall x < b(\varphi(x, b) \to \psi(x + 1, b))$$

$\psi(0,b)$ は明らか．$x<b$ なる x で $\varphi(x,b)$ が成り立つとすると，ある y で $y+x=b\wedge\neg\psi(y)$ となる．いま $y>0$ であることから $y=z+1$ なる z が存在し，式 (3.7) の対偶によって $x+(z+1)=b\wedge\neg\psi(z)$ を得る．したがって $\psi(x+1,b)$ が成り立つ． □

系 3.12. $\mathrm{RCA}_0\vdash I\varphi, U\varphi, T\varphi, L\varphi \quad \text{for all } \varphi\in\Sigma^0_1\cup\Pi^0_1$

次の命題から論理式の集合 $\Sigma^0_1(\mathrm{Coll}_1)$，$\Pi^0_1(\mathrm{Coll}_1)$，$\Delta^0_1(\mathrm{Coll}_1)$ が有界量化に閉じることが分かる．

命題 3.13. $\theta(x)$ を Σ^0_1 論理式，$\psi(x)$ を Π^0_1 論理式とし，t を数項とする．このとき，論理式 $\forall x<t\theta(x)$ と $\exists x<t\psi(x)$ はそれぞれ $\Sigma_n(\mathrm{Coll}_n)$，$\Pi_n(\mathrm{Coll}_n)$ である．

証明. 証明においては影響がないので以下項 $t(\overline{y})$ は単に t と表記する．Σ^0_1 論理式 $\varphi(x)$ は Δ^0_0 論理式 θ によって

$$\varphi(x)=\exists z\theta(x,z)$$

と書ける．このとき $B_x\theta$ から

$$(\mathrm{Coll}_1\vdash)\forall t(\forall x<t\exists z\theta(x,z)\leftrightarrow\underbrace{\exists s\forall x<t\exists z<s\theta(x,z)}_{\Sigma^0_1})$$

であるので，$\forall x<t\varphi(x)$ が $\Sigma^0_1(\mathrm{Coll}_1)$ だと分かる．$\Pi^0_1(\mathrm{Coll}_1)$ が存在有界量化に閉じることは，以上に現われた $\varphi(x)$ を $\neg\varphi(x)$ に置き換えればそれが証明になる． □

命題 3.14. $\mathrm{RCA}_0\vdash\mathrm{Coll}_1$．特にここから命題 1.8 が結論できる．

証明. 任意にとった Σ^0_1 論理式 $\varphi(x)$ と数項 t について

$$\forall x<t\exists\overline{y}\varphi(x,\overline{y}) \tag{3.8}$$

と仮定する．$\varphi(x,\overline{y})$ は Σ_1 であるので，ある Δ_0 論理式 θ によって $\varphi(x,\overline{y})=\exists w\theta(x,\overline{y},w)$ と書ける．このとき以下を[*16]示せばよい．

$$\exists s\forall x<t\exists\overline{y},w<s\theta(x,\overline{y},w)$$

まず $\psi(u)$ を Σ_1 論理式 $\exists s\forall x<u\exists\overline{y},w<s\theta(x,\overline{y},w)$ とおくと，示すべきは $\psi(t)$ である．ここで命題 3.2 の証明から RCA_0 は Σ^0_1 論理式 ψ の $U_u\psi$ を含意することが分かるので結局次を示せばよいことになる．

$$\psi(0)\wedge\forall u<t(\psi(u)\to\psi(u+1))$$

まず $\psi(0)$ は明らか．次に $u<t$ なる u について $\psi(u)$ を仮定すると，ある s_u で $\forall x<u\exists\overline{y},w<s_u\theta(x,\overline{y},w)$ となる．いまこの u は t 未満なので，仮定 (3.8) によって $\theta(u,\overline{y}_u,w_u)$ を満たす $\overline{y}_u,w_u$ が存在する．ここで $s_{u+1}:=\max(\overline{y}_u,w_u,s_u)+1$ とおけば

$$\forall x<u+1\exists\overline{y},w<s_{u+1}\theta(x,\overline{y},w)$$

[*16] $\exists\overline{y},w<s$ では $\overline{y},w$ の全てが s で押さえられてる．

が成り立つので ψ に関する帰納法が完了した.

□

3.2 計算可能関数・計算可能集合の基本事項

この節の内容は Kaye [4] の 3.1 節を参考にしている.

命題 3.15. 以下の関数はすべて原子再帰的である.

(a) $x+y$

(b) $x \cdot y$

(c) $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ x-1 & \text{otherwise} \end{cases}$

(d) $x - y = \begin{cases} 0 & \text{if } y \geq x \\ x-1 & \text{otherwise} \end{cases}$

(e) $\max(x, y)$

(f) $\min(x, y)$

(g) $\mathrm{eq}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y \\ 0 & \text{if } x \neq y \end{cases}$

(h) $\mathrm{lt}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < y \\ 0 & \text{if } x \geq y \end{cases}$

証明. たとえば (a) は以下の原子再帰法で定義できる.

$$\begin{aligned} \mathrm{add}(x, 0) &:= U_1^1(x) \\ \mathrm{add}(x, y+1) &:= g(x, y, (\mathrm{add}(x, y))) \end{aligned}$$

ただしここで $g(x, y, z) = S(U_3^3(x, y, z))$ である. □

補題 3.16. $f : \omega^k \to \omega$ が原子再帰的関数であるとき，その有限和と有限積もまた原子再帰的関数．つまり，

$$g(\overline{x}, y) = \Sigma_{z<y} f(\overline{x}, z), \quad h(\overline{x}, y) = \Pi_{z<y} f(\overline{x}, z)$$

はそれぞれ $\mathscr{PR}$ に属する.

証明. 少しインフォーマルだが有限和は以下で定義できる[*17].

$$\begin{aligned} g(\overline{x}, 0) &:= 0 \\ g(\overline{x}, y+1) &:= f(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \end{aligned}$$

[*17] 射影を省略しているのでまだ完全には定義に従っているとは言えないが，もう少しフォーマルに書くと次のように

有限積は以下のように定義できる．

$$h(\overline{x},0) := 1$$
$$h(\overline{x},y+1) := f(\overline{x},y)\cdot h(\overline{x},y)$$

以上で定義した g,h がそれぞれ本物の有限和・有限積の関数になっていることは y に関する帰納法で確認できる． $\square$

命題 3.17. $\mathscr{PR}$ は有界最小化に閉じる．つまり $g(\overline{x},y)$ が $\mathscr{PR}$ の関数なら，

$$h(\overline{x},z) := \begin{cases} \text{そのような最小の } y & \text{if } \begin{array}{l} g(\overline{x},0)\downarrow, g(\overline{x},1)\downarrow, \ldots, g(\overline{x},y)\downarrow \\ \text{かつ } g(\overline{x},y)=0 \text{ となる } y \text{ が } z \text{ 以下に存在する．} \end{array} \\ z+1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

によって定まる h もまた $\mathscr{PR}$ に属する．このように定まる h を $h(\overline{x},z)=(\mu y\leq z)(g(\overline{x},y)=0)$ と書く．

証明． $h(\overline{x},z) := \Sigma_{i<z+1}\Pi_{y<i+1}(1\dot{-}\mathrm{eq}(g(\overline{x},y),0))$ とすればよい． $\square$

補題 3.18. L_1 の任意の Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し，

$$\chi_\theta(\overline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta(\overline{x}) \text{ が正しい．} \\ 0 & \text{if } \neg\theta(\overline{x}) \text{ が正しい．} \end{cases}$$

[*18]によって定義される関数 $\chi_\theta(\overline{x}):\omega\to\omega$ は原子再帰的である．

証明． Δ_0 論理式の構成に関する帰納法によって示す．命題 3.15 より原子再帰的関数の集合 $\mathscr{PR}$ は $0, x+1, x+y, x\cdot y$ を含み合成に閉じるので，任意の L_1 項 $t(\overline{x})$ はそれを関数と見なせば[*19] $\mathscr{PR}$ に含まれる．L_1 の原子論理式は $t(\overline{x}), s(\overline{x})$ を項として $t(\overline{x})=s(\overline{x})$ と $t(\overline{x})<s(\overline{x})$ の二種類であり，それぞれ

$$\chi_{t=s}(\overline{x}) = \mathrm{eq}(t(\overline{x}),s(\overline{x})),\quad \chi_{t<s}(\overline{x}) = \mathrm{lt}(t(\overline{x}),s(\overline{x}))$$

と定めれば命題 3.15 より $\mathrm{eq}(x,y), \mathrm{lt}(x,y)\in\mathscr{PR}$ であるから $\chi_{t=s}(\overline{x}), \chi_{t<s}(\overline{x})\in\mathscr{PR}$ となり，また明らかに

$$\chi_{t=s}(\overline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } t(\overline{x})=s(\overline{x}) \\ 0 & \text{if } \neg(t(\overline{x})=s(\overline{x})) \end{cases} \quad \chi_{t<s}(\overline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } t(\overline{x})<s(\overline{x}) \\ 0 & \text{if } \neg(t(\overline{x})<s(\overline{x})) \end{cases}$$

なる．

$$g(\overline{x},0) := 0(x)$$
$$g(\overline{x},y+1) := h(\overline{x},y,g(\overline{x},y))$$

ただしここで $h(\overline{x},y,z)=\mathrm{add}(f(\overline{x},y),z)$ である．毎回定義に戻って原始再帰法を適応するのは煩わしいので証明中のようなある程度インフォーマルな書き方を今後は積極的に採用する．

[*18] 以降「〜が正しい」は文脈から明らかな場合は省略する．

[*19] 正確に言えば，$\overline{x},y\in\omega$について，$t'(\overline{x})=y :\Leftrightarrow$「$t(\overline{x})=y$ が正しい 」によって定義される自然数上の関数 $t':\omega^k\to\omega$ と L_1 の項 $t(\overline{x})$ を同一視するということである．

が成り立つ．帰納段階で考える必要があるのは $\wedge, \vee, \neg$ と有界量化である．このうち三つは簡単である．実際，$\theta_1(\overline{x}), \theta_2(\overline{x})$ が Δ_0 論理式で $\chi_{\theta_1}(\overline{x}), \chi_{\theta_2}(\overline{x}) \in \mathscr{PR}$ と仮定すると，

$$\chi_{\theta_1 \wedge \theta_2}(\overline{x}) = \min(\chi_{\theta_1}(\overline{x}), \chi_{\theta_2}(\overline{x}))$$
$$\chi_{\theta_1 \vee \theta_2}(\overline{x}) = \max(\chi_{\theta_1}(\overline{x}), \chi_{\theta_2}(\overline{x}))$$
$$\chi_{\neg\theta_1}(\overline{x}) = 1 \dot{-} \chi_{\theta_1}(\overline{x})$$

はそれぞれ $\mathscr{PR}$ に属し，明らかに条件を満たす．$\theta(\overline{x}, y)$ を $\chi_\theta(\overline{x}, y) \in \mathscr{PR}$ を満たす Δ_0 論理式とし，$t(\overline{x})$ を L_1 の項として $\psi(\overline{x})$ を $\exists y < t(\overline{x})\theta(\overline{x}, y)$ とおく．このとき，

$$\chi_\psi(\overline{x}) = 1 \dot{-} \mathrm{eq}(t(\overline{x}) + 1, (\mu y \leq t(\overline{x})(1 \dot{-} \chi_\theta(\overline{x}, y) = 0)))$$

は 補題 3.17 より $\mathscr{PR}$ に属し，また条件を満たす．φ が $\forall y < t(\overline{x})\theta(\overline{x}, y)$ の形の場合は，

$$\chi_\varphi(\overline{x}) = \mathrm{eq}(t(\overline{x}) + 1, (\mu y \leq t(\overline{x})(\chi_\theta(\overline{x}, y) = 0)))$$

とすればよい． □

定義 3.19. Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x}, y)$ について，

$$f(\overline{x}) := \begin{cases} \text{そのような最小の } y & \text{if } \theta(\overline{x}, y) \text{ となる } y \text{ が存在する．} \\ \text{未定義} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

によって定まる関数を[*20] $f(\overline{x}) = (\mu y)(\theta(\overline{x}, y))$ と表記する．また，

$$g(\overline{x}, z) := \begin{cases} \text{そのような最小の } y & \text{if } \theta(\overline{x}, y) \text{ となる } y \text{ が } z \text{ 以下に存在する．} \\ z + 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

によって定まる g を $g(\overline{x}, z) = (\mu y \leq z)(\theta(\overline{x}, y))$ と表記する．

補題 3.20. Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x}, y)$ について，

$$f(\overline{x}) = (\mu y)(\theta(\overline{x}, y))$$
$$g(\overline{x}, z) = (\mu y \leq z)(\theta(\overline{x}, y))$$

によって定めた f, g はそれぞれ $f \in \mathscr{C}$，$g \in \mathscr{PR}$ となる．

証明． 補題 3.18 より

$$\chi_\theta(\overline{x}, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta(\overline{x}, y) \\ 0 & \text{if } \neg\theta(\overline{x}, y) \end{cases}$$

によって定義される関数 χ_θ は原子再帰的である．f, g はそれぞれ

$$f(\overline{x}) = (\mu y)(1 \dot{-} \chi_\theta(\overline{x}, y) = 0)$$
$$g(\overline{x}, z) = (\mu y \leq z)(1 \dot{-} \chi_\theta(\overline{x}, y) = 0)$$

と書け，$f \in \mathscr{C}$ は再帰的関数が最小化に閉じることから従い，$g \in \mathscr{PR}$ は補題 3.17 から従う． □

[*20] $\theta(\overline{x}, y)$ となる y が存在するなら，そのような最小の y は必ず一意的に存在する．

定義 3.21.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \omega^2 \to \omega; (x, y) \mapsto \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

この関数をペアリング関数，もしくはカントールの対関数という．

連続する二つの自然数の積は偶数なので，ペアリング関数は正しく自然数上の関数である．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ と $+$ の合成によって構成されており，この f は以下のように原子再帰的に定義される[*21]のでペアリング関数も原子再帰的である．

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(x+1) &= f(x) + (x+1) \end{aligned}$$

命題 3.22. ペアリング関数は全単射である．

証明. 全射性: 任意の $z \in \omega$ に対し，$\langle x, y \rangle = z$ を満たす $x, y \in \omega$ が存在することを帰納法によって示そう．$z = 0$ なら $\langle 0, 0 \rangle = 0$．次に z について $\langle x, y \rangle = z$ となる $x, y \in \omega$ が存在したとする．

$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned} z + 1 = \langle x, y \rangle + 1 &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y + 1 \\ &= \frac{((x-1)+(y+1))((x-1)+(y+1)+1)}{2} + y + 1 = \langle x-1, y+1 \rangle \end{aligned}$$

$x = 0$ のとき

$$\begin{aligned} z + 1 = \langle 0, y \rangle + 1 &= \frac{y(y+1)}{2} + y + 1 \\ &= \frac{(y+1)(y+2)}{2} + 0 = \langle y+1, 0 \rangle \end{aligned}$$

単射性: $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ とする．まず $x + y = u + v$ を背理法で示そう．$x + y < u + v$ と仮定する．このとき $x + y + 1 \leq u + v$ だから，

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y &< \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x + y + 1 \\ &= \frac{(x+y+1)(x+y) + 2(x+y+1)}{2} \\ &= \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2} \\ &\leq \frac{(u+v)(u+v+1)}{2} \\ &\leq \frac{(u+v)(u+v+1)}{2} + v = \langle u, v \rangle = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

[*21] より形式的には $g(x, z) = z + (x+1)$ とゼロ関数 $0(x)$ によって $f(0) = 0(x), f(x+1) = g(x, f(x))$

は明らかに矛盾である．$x+y>u+v$ と仮定しても同様なので $x+y=u+v$ だと分かる．よって

$$\begin{aligned}
v &= \langle u,v\rangle - \frac{(u+v)(u+v+1)}{2} \\
&= \langle x,y\rangle - \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} && (\because \text{仮定と } x+y=u+v) \\
&= y
\end{aligned}$$

これと $x+y=u+v$ から $x=u$ も成り立つ． □

ペアリング関数は二つの自然数の組をまとめるものだったが，ペアリング関数の合成を考えることによって三つ以上の自然数をまとめる関数も定義できる．

定義 3.23. $k\geq 3$ について，

$$\langle x_1,x_2...,x_k\rangle = \langle x_1,\langle x_2,...,x_k\rangle\rangle$$

によって帰納的に自然数上の関数 $\langle\cdot,...,\cdot\rangle:\omega^k\to\omega$ を定義する．

この関数たちも原子再帰的関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の合成によって定義されるので原子再帰的である．またすべての k について $\langle\cdot,...,\cdot\rangle:\omega^k\to\omega$ が全単射であることは命題 3.22 と k による帰納法で簡単に証明できる．

命題 3.24. 各 $k\geq 2$ について，任意の $x_1,...,x_k$ に対し以下が成り立つ．

$$x_1,...,x_k\leq\langle x_1,...,x_k\rangle$$

証明． k に関する帰納法で示す．まず $k=2$ のとき

$$x_1=\frac{x_1+x_1}{2}\leq\frac{x_1^2+x_1}{2}=\frac{x_1(x_1+1)}{2}\leq\frac{(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)}{2}+x_2=\langle x_1,x_2\rangle$$

$x_2\leq\langle x_1,x_2\rangle$ は明らか．

次に $k(\geq 2)$ で命題が成り立ったと仮定する．$\langle x_1,x_2,...,x_{k+1}\rangle=\langle x_1,\langle x_2,...,x_{k+1}\rangle\rangle$ だから，$k=2$ の場合で成り立つことから

$$x_1,\langle x_2,...,x_{k+1}\rangle\leq\langle x_1,x_2,...,x_{k+1}\rangle$$

であり，帰納法の仮定から

$$x_2,...x_{k+1}\leq\langle x_2,...,x_{k+1}\rangle$$

□

ペアリング関数は，自然数 $x,y,z\in\omega$ について

$$\langle x,y\rangle=z\Leftrightarrow(x+y)(x+y+1)+2y=2z$$

が成り立つので，ω 上で議論する際には Δ_0 論理式 $(x+y)(x+y+1)+2y=2z$ の略記と見なすことで $\langle x,y\rangle=z$ が論理式中に現れることを許す．この他，定義 3.23 の関数たちについても同様にあつかう．つまり，

$$\langle x_1,x_2,...,x_k\rangle=z \Leftrightarrow \exists y\leq z(\langle x_1,y\rangle=z\wedge\langle x_2,...,x_k\rangle=y)$$

が成り立つので，Δ_0 論理式（以下の論理式中に現れるペアリング関数を帰納的に略記と見なす）$\exists y\leq z(\langle x_1,y\rangle=z\wedge\langle x_2,...,x_k\rangle=y)$ の略記として $\langle x_1,x_2,...,x_k\rangle=z$ が論理式中に現れることを許す[*22]．この約束の元で命題 3.22 や命題 3.24 から以下が成り立つ．

命題 3.25. 次が両方正しい．

$$\forall z\exists! x_1,...,x_k(\langle x_1,...,x_k\rangle=z),\quad \forall z,x_1,...,x_k(\langle x_1,...,x_k\rangle=z\to x_1\leq z\wedge\cdots\wedge x_k\leq z)$$

次は補題 1.24 から従う．その補題 RCA_0 上での証明は 3.3 節で行う．

補題 3.26 (ゲーデルの補題)**.** 次の二つの条件を満たす L_1 の Δ_0 論理式 $\theta(x,y,z)$ が存在する[*23]．

(a) $\forall x,y,\exists! z\theta(x,y,z)$

(b) 各 $k\in\omega$ について，任意に取った k 個の元 $z_0,...,z_{k-1}\in\omega$ ごとに，以下を成り立たせる $x\in\omega$ が存在する．

$$\text{すべての } i<k \text{ について} \theta(x,i,z_i)$$

この補題における (a) は，x,y を入力として z を出力するような自然数上の関数を $\theta(x,y,z)$ によって定義できることを主張している．以後この章では上の補題を満たす論理式 θ を一つ固定し，分かりやすさのために $\theta(x,y,z)$ を $(x)_y=z$ と略記することにする．この略記のもとで (b) を解釈すれば，適当にとった $z_0,...,z_{k-1}$ という自然数に対し，ある $x\in\omega$ で $(x)_0=z_0,(x)_1=z_1,...,(x)_{k-1}=z_{k-1}$ が ω で成り立つということである．このことを，x が列 $z_0,...,z_{k-1}$ をコードしていると言う．

以上で準備が整ったので定理 1.16 を証明しよう．

定理 3.27 (定理 1.16 の再掲)**.** $f:\omega^k\to\omega$ を ω 上の部分関数とする．このとき，f が計算可能であることと，

$$f(\overline{x})=y\Leftrightarrow\varphi(\overline{x},y)$$

が全ての $\overline{x},y\in\omega$ で成り立つような L_1 の Σ_1 論理式 φ が存在することは同値である．

---

*22 現段階では $\langle x,y\rangle=z$ の形の出現しか許していないことに注意．つまり，$\langle x,y\rangle\leq z$ や，$\forall z\leq\langle x,y\rangle$ などの形によるペアリング関数の出現はまた後で考察する．

*23 あとで証明することだが，

$$(x)_y=z\leftrightarrow\exists a,m\leq x\left[\langle a,m\rangle=x\wedge\left(\frac{a}{m(y+1)+1}\right)=z\right]$$

が条件を満たす $\theta(x,y,z)$ の一例である．ただしここで $\left(\frac{x}{y}\right)=z$ とは Δ_0 論理式 $(y=0\wedge z=0)\vee(y\neq 0\wedge\exists w\leq x(x=y\cdot w+z\wedge z<y))$ の略記であり，自然数上で解釈すれば “x を y で割った余りが z” を意味している．

証明. ($\Leftarrow$) まず初めにペアリング関数の第一引数を取り出す原子再帰的関数を定義しよう．$\exists z \leq x(\langle y, z\rangle = x)$ は Δ_0 論理式なので，補題 3.20 から

$$\mathrm{first}(x) = (\mu y \leq x)(\exists z \leq x(\langle y, z\rangle = x))$$

で定義する $\mathrm{first} : \omega \to \omega$ は原子再帰的関数である．この first が正しくペアリングの第一引数を返すことは命題 3.25 で保証される．仮定より，

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y)$$

が全ての $\overline{x}, y \in \omega$ で成り立つような L_1 の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ が存在する．よってある Δ_0 論理式 ψ によって $\varphi(\overline{x}, y) = \exists\overline{z}\psi(\overline{x}, y, \overline{z})$ と書け，$\exists v, \overline{w} \leq z(\langle v, \overline{w}\rangle = z \wedge \psi(\overline{x}, v, \overline{w}))$ は Δ_0 論理式であることから

$$g(\overline{x}) = (\mu z)(\exists v, \overline{w} \leq z(\langle v, \overline{w}\rangle = z \wedge \psi(\overline{x}, v, \overline{w})))$$

で定義される $g : \omega^k \to \omega$ も補題 3.20 より再帰的関数であり，よって $\mathrm{first} \circ g : \omega^k \to \omega$ は再帰的関数である．したがって $f = \mathrm{first} \circ g$ を示せば十分である．

<u>Claim</u> $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\mathrm{first} \circ g)$

$$\begin{aligned}
\overline{x} \in \mathrm{dom}(f) &\Leftrightarrow \exists v\varphi(\overline{x}, v) \\
&\Leftrightarrow \exists v, \overline{w}\psi(\overline{x}, v, \overline{w}) \\
&\Leftrightarrow \exists z(\exists v, \overline{w} \leq z(\langle v, \overline{w}\rangle = z \wedge \psi(\overline{x}, v, \overline{w}))) && (\because \text{命題 } 3.25) \\
&\Leftrightarrow \exists z((\exists v, \overline{w} \leq z(\langle v, \overline{w}\rangle = z \wedge \psi(\overline{x}, v, \overline{w})))\wedge \\
&\qquad\qquad \forall z' < z\neg(\exists v, \overline{w} \leq z'(\langle v, \overline{w}\rangle = z' \wedge \psi(\overline{x}, v, \overline{w})))) && (\because \text{最小値原理}) \\
&\Leftrightarrow \overline{x} \in \mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(\mathrm{first} \circ g) && (\because \mathrm{first} \text{ は全域関数})
\end{aligned}$$

<u>Claim</u> 任意の $\overline{x} \in \mathrm{dom}(f)$ について $f(\overline{x}) = \mathrm{first}(g(\overline{x}))$

$\overline{x} \in \mathrm{dom}(f)$ を固定する．このとき先の Claim より $\overline{x} \in \mathrm{dom}(g)$ であるので，$f(\overline{x})$ と $g(\overline{x})$ の両方の値が存在している．

まず $f(\overline{x}) = y$ を仮定する．このとき，$\varphi(\overline{x}, y)$ すなわち $\exists\overline{w}\psi(\overline{x}, y, \overline{w})$ であるので

$$\exists z(\exists v, \overline{w} \leq z(\langle v, \overline{w}\rangle = z \wedge \psi(\overline{x}, v, \overline{w})))$$

が成り立ち，最小値原理より

$$\exists v, \overline{w} \leq z(\langle v, \overline{w}\rangle = z \wedge \psi(\overline{x}, v, \overline{w}))$$

を満たす最小の $z \in \omega$ が存在する．よってある $v, \overline{w} \leq z$ によって $\langle v, \overline{w}\rangle = z$ と $\psi(\overline{x}, v, \overline{w})$ が成り立つが，$\overline{x} \in \omega$ ごとに $\varphi(\overline{x}, y)$ を満たす y は高々一つなので $v = y$ である．したがって $\mathrm{first}(g(\overline{x})) = \mathrm{first}(\langle y, \overline{w}\rangle) = y$ となる．

($\Rightarrow$) 任意の $f \in \mathscr{C}$ について，ある Σ_1 論理式 $\varphi_f(\overline{x}, y)$ が存在し

$$\text{すべての}\overline{x}, y \in \omega\text{で } f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \varphi_f(\overline{x}, y) \tag{3.9}$$

が成り立つことを，再帰的関数の構成に関する帰納法によって示す．便宜上，部分関数 f に対し式 (3.9) を満たす Σ_1 論理式 φ_f が存在することを，「f は Σ_1 グラフを持つ」と表現することにする．いま定義した言葉で示すべきことを言い直せば，任意の $f \in \mathscr{C}$ は Σ_1 グラフをもつ，ということである．したがって Σ_1 グラフを持つような部分関数の集合はゼロ関数・後者関数・射影関数を含み，合成・原子再帰・最小化に閉じることを示せば，$\mathscr{C}$ の最小性から結論が従う．

まずゼロ関数・後者関数・射影関数に対応する Σ_1 論理式 $\varphi_0, \varphi_S, \varphi_{p_i}$ はそれぞれ

$$y = 0, \quad y = x + 1, \quad y = x_i$$

とすればよいので，以上の関数は Σ_1 グラフをもつ．

合成: $f(x_1, ..., x_k), g_1(\overline{z}), ..., g_k(\overline{z})$ が Σ_1 グラフを持つと仮定し，対応する論理式をそれぞれ $\varphi_f, \varphi_{g_1}, ..., \varphi_{g_k}$ とする．このとき，これらの合成によって得られる関数 $h(\overline{z}) := f(g_1(\overline{z}), ..., g_k(\overline{z}))$ は，次の論理式を考えることによって Σ_1 グラフを持つことが分かる．

$$\exists u_1, ..., u_k(\varphi_{g_1}(\overline{z}, u_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_{g_k}(\overline{z}, u_k) \wedge \varphi_f(u_1, ..., u_k, y)) \tag{3.10}$$

実際，$h(\overline{z}) = y$ とすると $g_1(\overline{z})\downarrow, ..., g_k(\overline{z})\downarrow, f(g_1(\overline{z}), ..., g_k(\overline{z}))\downarrow$ であり，ω で (3.10) の論理式が成り立つことは明らかで，逆が成り立つことも明らか．したがって Σ_1 グラフを持つ ω 上の部分関数の集合は合成に閉じる．

原子再帰: $g(\overline{x})$ と $h(\overline{x}, y, z)$ は Σ_1 グラフを持つと仮定し，対応する論理式をそれぞれ φ_g, φ_h とする．いま $f(\overline{x}, y)$ が以下の原子再帰法で定義されているとする．

$$\begin{aligned} f(\overline{x}, 0) &= g(\overline{x}) \\ f(\overline{x}, y+1) &= h(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y)) \end{aligned}$$

先に結論を述べると，任意の $\overline{x}, y, z \in \omega$ に対して以下が成り立ち，下記の論理式はある Σ_1 論理式と同値である．

$$\begin{aligned} f(\overline{x}, y) = z \Leftrightarrow \exists u, v\{&(u)_0 = v \wedge \varphi_g(\overline{x}, v) \wedge (u)_y = z \wedge \\ &\forall i < y \exists r, s[(u)_{i+1} = s \wedge (u)_i = r \wedge \varphi_h(\overline{x}, i, r, s)]\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

この同値性を y に関する帰納法によって示そう．$f(\overline{x}, 0) = z$ と仮定する．このとき，$g(\overline{x}) = v$ となる自然数 $v \in \omega$ が存在する．よって補題 3.26 から $(u)_0 = v$ を満たす u を取ればよい．逆は自明．次に y で上の同値が成り立つとし，$y+1$ でも成り立つことを示そう．$f(\overline{x}, y+1) = z$ を仮定すると $h(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y))\downarrow$ であるので，$f(\overline{x}, y) = z', h(\overline{x}, y, z') = z$ を満たす $z' \in \omega$ が存在する．また（y に関する）帰納法の仮定から

$$\begin{aligned} f(\overline{x}, y) = z' \Leftrightarrow \{&(u)_0 = v \wedge \varphi_g(\overline{x}, v) \wedge (u)_y = z' \wedge \\ &\forall i < y \exists r, s[(u)_{i+1} = s \wedge (u)_i = r \wedge \varphi_h(\overline{x}, i, r, s)]\} \end{aligned}$$

を満たす $u, v \in \omega$ が存在する．よって補題 3.26 から，$(u)_0 = z_0, ..., (u)_y = z_y$ を満たす自然数 $z_0, ..., z_y (= z')$ に加え，z を合わせた計 $y+2$ 個の自然数をコードする $u' \in \omega$ が存在する．つまり，この u' は以下を満たす．

$$\forall i < y + 1((u')_i = (u)_i) \wedge (u')_{y+1} = z$$

いま $h(\overline{x}, y, z') = z$ より $\varphi_h(\overline{x}, y, z', z)$ となることを思い出せば，以下が成り立つ．

$$\{(u')_0 = v \wedge \varphi_g(\overline{x}, v) \wedge (u')_{y+1} = z \wedge \\ \forall i < y + 1 \exists r, s[(u')_{i+1} = s \wedge (u')_i = r \wedge \varphi_h(\overline{x}, i, r, s)]\}$$

逆に上式を仮定すれば $f(\overline{x}, y + 1) = z$ が従うことは明らか．従って帰納法が完了した．次に式 (3.11) と同値な Σ_1 論理式を探そう．問題になるのは二行目の，非有界存在量化の外に有界任意量化が付いている箇所である．いま $y \in \omega$ であるので，$0, ..., y - 1$ なる自然数は有限個しかない．よって各 $i < y$ ごとに r, s が取れていくが，十分大きな自然数 w を[*24]取ればそれら r, s 達の上界になる．つまり，以下が成り立つ．

$$\forall u, v(\forall i < y \exists r, s[(u)_{i+1} = s \wedge \text{中略}] \leftrightarrow \exists w \forall i < y \exists r, s < w[(u)_{i+1} = s \wedge \text{中略}])$$

最小化: $g(\overline{x}, y)$ は Σ_1 グラフを持つと仮定し，対応する論理式を φ_g とする．いま $f(\overline{x})$ が以下の最小化で定義されているとする．

$$f(\overline{x}) = (\mu y)(g(\overline{x}, y) = 0)$$

このとき，任意の $\overline{x}, y \in \omega$ に対して以下が成り立つことは最小化の定義と補題 3.26 から明らか．

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \exists u\{(u)_y = 0 \wedge \forall i < y(\neg(u)_i = 0) \wedge \forall j \leq y \exists v[\varphi_g(\overline{x}, j, v) \wedge (u)_j = v]\}$$

この右の論理式も原子再帰法のときと同様の議論によって Σ_1 論理式に変形できる．

□

関数の全域性を仮定すれば，関数のグラフが Δ_1 であることと計算可能であることは同値である．このことを正確に述べると以下になる．

系 3.28. $f : \omega^k \to \omega$ を ω 上の全域関数とする．このとき，f が計算可能であることと，

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y) \Leftrightarrow \psi(\overline{x}, y)$$

が全ての $\overline{x}, y \in \omega$ で成り立つような L_1 の Σ_1 論理式 φ と L_1 の Π_1 論理式 ψ が存在することは同値である．

証明． f を全域再帰的関数とすると，定理 1.16 より

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y)$$

が全ての $\overline{x}, y \in \omega$ で成り立つような L_1 の Σ_1 論理式 φ が存在し，特に全域性より

$$\forall \overline{x} \exists! y \varphi(\overline{x}, y)$$

である．したがって

$$\forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow \forall z(\varphi(\overline{x}, z) \to z = y))$$

が成り立つので，$\forall z(\varphi(\overline{x}, z) \to z = y)$ が条件を満たす Π_1 論理式である． □

[*24] $i < y$ ごとに取れる r, s を r_i, s_i と書けば，例えば $w = \max\{r_0, s_0, ..., r_{y-1}, sy - 1\}$ とすればよい．

系 3.29. $A \subseteq \omega^k$ が c.e. であることと，

$$\overline{x} \in A \Leftrightarrow \psi(\overline{x})$$

がすべての $\overline{x} \in \omega$ で成り立つような L_1 の Σ_1 論理式 $\psi(x_1, ..., x_k)$ が存在することは同値である．

証明. ($\Rightarrow$) A を c.e. 集合とすると，定義よりある $f \in \mathscr{C}$ で $A = \mathrm{dom}(f)$ となる．ここで定理 1.16 より

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \varphi_f(\overline{x}, y)$$

が全ての $\overline{x}, y \in \omega$ で成り立つような Σ_1 論理式 φ_f が存在する．このとき $\overline{x} \in \omega$ に対し

$$\overline{x} \in A \Leftrightarrow f(\overline{x}) \downarrow \Leftrightarrow \exists y \varphi_f(\overline{x}, y)$$

が成り立つ．

($\Leftarrow$) 条件を満たす Σ_1 論理式を $\psi_A(\overline{x})$ とおくと，$A = \{\, \overline{x} \in \omega \mid \psi_A(\overline{x}) \,\}$ となる．ここで部分関数 f を

$$f(\overline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \psi(\overline{x}) \\ \text{未定義} & \text{otherwise} \end{cases}$$

によって定めると明らかに $A = \mathrm{dom}(f)$ であり，すべての自然数 $\overline{x}, y$ について

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow y = 0 \wedge \psi(\overline{x})$$

が成り立つので定理 1.16 から $f \in \mathscr{C}$ となる．したがって A は c.e. 集合である． □

系 3.30 (Post の定理)**.** $A \subseteq \omega^k$ が計算可能であることと，

$$\overline{x} \in A \Leftrightarrow \psi(\overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(\overline{x})$$

がすべての $\overline{x} \in \omega$ で成り立つような L_1 の Σ_1 論理式 $\psi(x_1, ..., x_k)$ と Π_1 論理式 $\varphi(x_1, ..., x_k)$ が存在することは同値である．

証明. ($\Rightarrow$)A を再帰的集合とすると，定義からその特性関数 χ_A は再帰的．よって定理 1.16 より以下がすべての自然数 $\overline{x}, y$ で成り立つような Σ_1 論理式 $\varphi_\chi(\overline{x}, y)$ が存在する．

$$\chi(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \varphi_\chi(\overline{x}, y)$$

よって

$$\overline{x} \in A \Leftrightarrow \chi_A(\overline{x}) = 1 \Leftrightarrow \varphi_\chi(\overline{x}, 1)$$

$$\overline{x} \in A^c \Leftrightarrow \chi_A(\overline{x}) = 0 \Leftrightarrow \varphi_\chi(\overline{x}, 0)$$

が成り立つので，

$$\overline{x} \in A \Leftrightarrow \overline{x} \notin A^c \Leftrightarrow \neg\varphi_\chi(\overline{x}, 0)$$

より次を得る．

$$\overline{x} \in A \Leftrightarrow \varphi_\chi(\overline{x}, 1) \Leftrightarrow \neg\varphi_\chi(\overline{x}, 0)$$

(⇐) 任意の $\overline{x} \in \omega$ について $\overline{x} \in A$ と $\overline{x} \notin A$ 両方が成り立つことはなく，また少なくとも一方は成り立つので，仮定より

$$\forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \vee \neg\psi(\overline{x})), \quad \neg\exists \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \wedge \neg\psi(\overline{x}))$$

であるから，

$$f(\overline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \varphi(\overline{x}) \\ 0 & \text{if } \neg\psi(\overline{x}) \end{cases}$$

によって全域関数 f が定まる．この f について

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow (\varphi(\overline{x}) \wedge y = 1) \vee (\neg\psi(\overline{x}) \wedge y = 0)$$

が成り立つので定理 1.16 より $f \in \mathscr{C}$ であり，$\overline{x} \in A \Leftrightarrow \varphi(\overline{x})$，$\overline{x} \notin A \Leftrightarrow \neg\psi(\overline{x})$ であるから，この f が A の特性関数である． □

系 3.31. $A \subseteq \omega^n$ について，A が計算可能であることと，A と A^c の両方が c.e. であることは同値.

証明. 系 3.29 と系 3.30 から明らか. □

相対化した方も全く同様に証明できる.

3.3 Gödel の β 関数による有限列のコーディング in RCA_0

この節の内容は Kaye [4] の 5 章を参考にしている.

この節では次が成り立つことを示す.

補題 3.32 (RCA_0，再掲)**.** 以下をすべて満たすような 2 変数関数 $(x)_y$ が存在する.

(a) $\forall x, y \exists! z((x)_y = z)$

(b) $\forall x, y((x)_y \leq x)$

(c) $\forall x \exists y((y)_0 = x)$

(d) $\forall x, y, z \exists w((\forall i < z (w)_i = (y)_i) \wedge (w)_z = x)$

ここで作るのは Gödel の β 関数とよばれているものである.

定義 3.33. 以下左辺をそれぞれ右辺によって定義（略記）する．

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = z \leftrightarrow (y = 0 \land z = 0) \lor (y \neq 0 \land yz \leq x < y(z+1)))$$
$$\left(\frac{x}{y}\right) = z \leftrightarrow (y = 0 \land z = 0) \lor (y \neq 0 \land \exists w \leq x(x = y \cdot w + z \land z < y))$$
$$x|y \leftrightarrow \exists z \leq y(xz = y \land x \neq 0)$$
$$x \equiv y \mod z \leftrightarrow z \neq 0 \land \left(\frac{x}{z}\right) = \left(\frac{y}{z}\right)$$
$$\mathrm{prime}(x) \leftrightarrow x \geq 2 \land \forall y, z(x|yz \to (x|y \lor x|z))$$
$$\mathrm{ireed}(x) \leftrightarrow x \geq 2 \land \forall y(y|x \to (y = 1 \lor y = x))$$
$$(x, y) = 1 \leftrightarrow x \geq 1 \land y \geq 1 \land \forall u(u|x \land u|y \to u = 1)$$
$$\langle x, y \rangle = z \leftrightarrow (x+y)(x+y+1) + 2y = 2z$$
$$\langle x_1, x_2, ..., x_k \rangle = z \leftrightarrow \exists y \leq z(\langle x_1, y \rangle = z \land \langle x_2, ..., x_k \rangle = y)$$
$$(x)_y = z \leftrightarrow \exists a, m \leq x \left[\langle a, m \rangle = x \land \left(\frac{a}{m(y+1)+1}\right) = z\right]$$

上から二つの関数は “x を y で割ったときの整数部”，“x を y で割った余り” である．これらが実際に全域的な関数となることはこれから下で示す．続いて，“x は y を割り切る”，“x と y は z を法として合同”，“x は素”，“x は既約”，“x と y は互いに素” を意図している[*25]．慣習に従い，$x \not| y$ を $\neg(x|y)$ の意味で使う．次二つは定義 3.21 周辺で詳しく述べたカントールの対関数で，その全単射性の RCA_0 における証明も既に与えたものと全く同様である．最後が本稿で詳しく述べる Gödel の β 関数である．これが実際に全域的な関数になり，性質 (a) から (d) を満たすことを以下で示していく．

命題 3.34. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y \exists! z \left(\frac{x}{y}\right) = z$

証明． まず $\psi(x, y)$ を以下の Δ_0 論理式とする．

$$\exists! z \leq y[(y = 0 \land z = 0) \lor (y \neq 0 \land \exists w \leq x(x = y \cdot w + z \land z < y))]$$

y をパラメーターと見なし，x による帰納法で $\forall x \psi(x, y)$ 示す．$\psi(0, y)$ は自明．$x+1$ の場合を考える．$y = 0$ なら自明なのでそうでないとする．

全域性: 帰納法の仮定より $x = y \cdot w + z$ を満たす $z < y, w \leq x$ が存在する． このとき $x+1 = yw + (z+1)$ となる．$z+1 < y$ なら自明であり，$z+1 = y$ でも $x+1 = y(w+1)+0$ なのでよい．

一意性: $x+1 = yw + z = yw' + z'$ たる $w, w' \leq x+1, z, z' < y$ が存在したとする．もし仮に $w < w'$ なら，$w+1 \leq w'$ より，

$$x+1 = yw + z < yw + y = y(w+1) \leq yw' \leq yw' + z' = x+1$$

[*25] 前に定めた数のペアリング関数 $(i, j) = (i+j)^2 + i$ と記号がかぶるが，文脈から区別できるのでそのまま使う．

となり矛盾する．$w' < w$ も同様なので，$w = w'$ であり，このとき明らかに $z = z'$ である．

$\square$

系 3.35. (除法の原理) $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y \exists! r, s(y \neq 0 \to (x = ys + r \wedge r < y))$

系 3.36. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y, \exists! z \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = z$

証明. $y \neq 0, x$ を任意にとる．除法の原理より $x = yz + r \wedge r < y$ を満たす r, z が一意に存在する．このとき $yz \leq x < yz + y$ である．この z の一意性は明らか． $\square$

命題 3.37 (RCA_0). 次が（RCA_0 で）成り立つ．

(a) $\forall x(\mathrm{ireed}(x) \leftrightarrow (x \geq 2 \wedge \forall y \leq x(y|x \to (y = 1 \vee y = x)))$

(b) $\forall x, y((x, y) = 1 \leftrightarrow x \geq 1 \wedge y \geq 1 \wedge \forall u \leq x + y(u|x \wedge u|y \to u = 1))$

証明. $\forall x, y(x > y \geq 1 \to \neg(x|y))$ より明らか． $\square$

この命題から $\{\, x \in \mathbb{N} \mid \mathrm{ireed}(x) \,\}$ と $\{\, (x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x, y) = 1 \,\}$ が RCA_0 で作ることができると分かる．

命題 3.38 (RCA_0). 次が成り立つ．

(a) $\forall x, y, z(x|y \wedge y|z \to x|z)$

(b) $\forall w, y(w < y \to \left(\frac{w}{y}\right) = w)$

(c) $\forall y, r, s(y \neq 0 \to r + sy \equiv r \mod y)$

(d) $\forall x, w, r, s(w \geq 1 \wedge s = \left\lfloor \frac{x}{w} \right\rfloor \wedge r = \left(\frac{x}{w}\right) \to x = sw + r \wedge 0 \leq r < w)$

(e) $\forall x, p(p|x \wedge p|(x + 1) \to p = 1)$

証明. (a) は明らかなので (b) から示す．w, y を $w < y$ を満たすように任意にとると，$\left(\frac{w}{y}\right)$ の定義より

$$w = ya + \left(\frac{w}{y}\right)$$

となる $a \leq w$ が存在する．もし仮に $a \neq 0$ なら $a \geq 1$ なので

$$w = ya + \left(\frac{w}{y}\right) \geq y + \left(\frac{w}{y}\right) \geq y > w$$

となり矛盾が導かれる．よって $a = 0$.

次に (c) を示す．$y \neq 0, s \neq 0, r$ を任意にとる．$u = \left(\frac{r+sy}{y}\right)$ とおくと，定義より

$$r + sy = wy + u \wedge u < y \tag{3.12}$$

となる $w \leq y$ が存在する．もし仮に $r < u$ なら $sy > wy$ なので $u = y(s-w)+r$ となり $\left(\frac{u}{y}\right) = r$ が導かれるが，(b) より $\left(\frac{u}{y}\right) = u$ となるので矛盾である．したがって $u \leq r$ であり，このとき $sy \leq wy$ なので $r = y(w - s) + u$ となり $\left(\frac{r}{y}\right) = u = \left(\frac{r+sy}{y}\right)$ が成り立つ．

(d) を示す．x, w, r, s をそれぞれ定理の前提を満たすようにとる．まず r の定義より $x = wz + r \wedge r < w$ を満たす z が存在する．次に s の定義より $ws \leq x < ws + w$ なので，PA^- の公理より $x = ws + r'$ を満たす r' が存在する．もし仮に $r' \geq w$ なら

$$x = ws + r' \geq ws + w > x$$

となり矛盾する．よって $r' < w$ だと分かったので，除法の原理より $r = r'$ かつ $s = z$ すなわち $x = ws + r$ が成り立つ．

最後に (e) を示す．$p|x \wedge p|(x+1)$ の定義より，$p \neq 0$ であり，

$$pw_1 = x \wedge pw_2 = x + 1$$

を満たす w_1, w_2 が存在する．明らかに $w_1 < w_2$ であるので，$p(w_2 - w_1) = pw_2 - pw_1 = 1$ となる．よって $p = 1$ 以外あり得ない． □

次の補題は，任意の互いに素な x, y について，y を法とする x の積に関する逆元が存在することを意味する[*26]．

補題 3.39. (ベズーの補題) $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y((x, y) = 1 \to \exists z < y(zx \equiv 1 \mod y))$

証明. x, y を $(x, y) = 1$ を満たすようにとる．まず x, y のいずれかが 1 なら自明なので考えなくてよい．いま，

$$\exists w[(x, y) = 1 \wedge x > 1 \wedge y > 1 \to (w \geq 1 \wedge \exists z < y(zx \equiv w \mod y))] \tag{3.13}$$

が成り立つ．実際，$w = \left(\frac{x}{y}\right)$ とおくと $(x, y) = 1$ より $w \geq 1$ であり，$w < y$ なので命題 3.38(b) より $w = \left(\frac{w}{y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)$ が成り立つ．よって $z = 1$ で $zx \equiv w \mod y$ が成り立っている．したがって Δ_0 最小値原理より，(3.13) の四角括弧の中を満たす最小の w_0 が存在する．この w_0 に関してまず次が成り立つことを示そう．

$$1 \leq w_0 \leq \left(\frac{x}{y}\right) \leq \min(x, y) \wedge w_0 < y$$

$x \geq y$ のときは $\left(\frac{x}{y}\right) < y = \min(x, y)$ より明らか．$y > x$ のときも命題 3.38(b) から $\left(\frac{x}{y}\right) = x = \min(x, y) < y$ が成り立つ．$w_0 \leq \left(\frac{x}{y}\right)$ は $w = \left(\frac{x}{y}\right)$ が (3.13) を満たすので w_0 の最小性より成り立つ．

私たちの目標は $w_0 = 1$ を示すことである．そのためには，いま $(x, y) = 1$ なので $w_0|x \wedge w_0|y$ を示せば十分である．

まず z_0 を次を満たすようにとる．

$$z_0 < y \wedge (z_0 x \equiv w_0 \mod y)$$

[*26] ベズーの補題（またはベズーの等式）とはもともと任意の互いに素な整数 x, y について，$ax + by = 1$ となる整数 a, b が存在するという初等整数論における主張である．それを負の数という概念を表に出さずに書いたのが本主張である．

すると $\left(\frac{z_0x}{y}\right)=\left(\frac{w_0}{y}\right)$ であり，$w_0<y$ であったので命題 3.38(b) より $w_0=\left(\frac{w_0}{y}\right)$，すなわち $w_0=\left(\frac{z_0x}{y}\right)$ 成り立つ．ここで $t=\lfloor\frac{z_0x}{y}\rfloor$ とおくと，命題 3.38(d) より $z_0x=ty+w_0$ が成り立つ．

Claim 1.$w_0|x$

$s=\lfloor\frac{x}{w_0}\rfloor$，$r=\left(\frac{x}{w_0}\right)$ とおくと，命題 3.38(d) より $x=sw_0+r$ と $0\leq r<w_0$ が成り立つ．よって

$$r=x-sw_0=x-s(z_0x-ty)=x+sty-sz_0x$$

が成り立ち，Δ_0 論理式の最小値原理によって $0\leq(1+uy-sz_0)<y$ を満たす u を取る[*27]と

$$\begin{aligned}
r&\equiv r+uyx \mod y && (\because \text{命題 } 3.38(c))\\
&\equiv x+sty-sz_0x+uyx \mod y\\
&\equiv sty+x(1+uy-sz_0) \mod y\\
&\equiv x(1+uy-sz_0) \mod y && (\because \text{命題 } 3.38(c))
\end{aligned}$$

が成り立つ．いま $r<w_0$ であり，w_0 は (3.13) を満たす最小元だったので $r=0$ 以外はあり得ない．ゆえに $x=sw_0$ すなわち $w_0|x$ が成り立つ．

Claim 2.$w_0|y$

$c=\lfloor\frac{y}{w_0}\rfloor$，$d=\left(\frac{y}{w_0}\right)$ とおくと，命題 3.38(d) より $y=cw_0+d$ と $0\leq d<w_0$ が成り立つ．よって

$$d=y-cw_0=y-c(z_0x-ty)=(1+ct)y-cz_0x$$

が成り立ち，$0\leq(by-cz_0)<y$ を満たす b を取ると

$$\begin{aligned}
d&\equiv d+byx \mod y && (\because \text{命題 } 3.38(c))\\
&\equiv (1+ct)y-cz_0x+byx \mod y\\
&\equiv (by-cz_0)x \mod y && (\because \text{命題 } 3.38(c))
\end{aligned}$$

となり w_0 の最小性から $d=0$ がいえるので $y=cw_0$ すなわち $w_0|y$ が成り立つ． □

系 3.40. $\mathrm{RCA}_0\vdash\forall x(\mathrm{prime}(x)\leftrightarrow\mathrm{ireed}(x))$

証明. x を固定しておく．

$(\mathrm{prime}(x)\to\mathrm{ireed}(x))$

まず仮定より $x\geq 2\wedge\forall y,z(x|yz\to(x|y\vee x|z))$ である．$y|x$ を満たす y を任意にとると，定義より $x=yz$ なる z が存在する．いま $x\geq 2$ なので $y,z>0$ である．定義から $x|x$ なので $x|yz$ であり，$\mathrm{prime}(x)$ から $x|y\vee x|z$ が成り立つ．$x|y$ なら $x\leq y$ であるが，明らかに $y\leq x$ なので $y=x$．$x|z$ の場合も，$x\leq z$ かつ $z\leq x$ なので $z=x$ となり $y=1$ が成り立つ．

$(\mathrm{ireed}(x)\to\mathrm{prime}(x))$

[*27] 形式的な議論をすると，$\varphi(u,y,s,z_0):=1+uy\geq sz_0$ とし $\forall y,s,z_0(\exists u\varphi(u,y,s,z_0)\to\exists u(\varphi(u,y,s,z_0)\wedge\forall v<u\neg\varphi(v,y,s,z_0)))$ によって取れる最小の u が条件を満たす．実際，$u=0$ なら $1\geq sz_0$ なので $1\geq 1-sz_0\geq 0$ から $y>1\geq 1+uy-sz_0\geq 0$ となり，そうでないなら $u\geq 1$ であり，$1+uy\geq sz_0$ より $1+uy-sz_0\geq 0$ となり，また $u-1(\geq 0)$ は $1+(u-1)y<sz_0$ なので $1+uy<y+sz_0$ すなわち $0\leq 1+uy-sz_0<y$ が成り立つ．

仮定より $x \geq 2 \wedge \forall y(y|x \to (y = 1 \vee y = x))$ である．ここで，もし仮に $x|ab \wedge \neg(x|a) \wedge \neg(x|b)$ を満たす a, b が存在したとする．すると $(x, a) = 1$ が成り立つ．実際，$u|x$ かつ $u|a$ を満たす u を取ると，$\mathrm{prime}(x)$ より $u = 1 \vee u = x$ となる．もし $u = x$ なら $x|a$ となるので $u = 1$ である．同様に $(x, b) = 1$ も成り立つ．ここで補題 3.39 より

$$ra \equiv 1 \mod x, \quad sb \equiv 1 \mod x$$

を満たす $r, s < x$ が存在する．したがって

$$ra = ux + 1, \quad sb = vx + 1$$

を満たす u, v が存在し，いま $x|ab$ と仮定していたので y で $xy = ab$ を満たすものがある．よって

$$rsxy = rsab = (ux + 1)(vx + 1) = uvx^2 + ux + vx + 1$$

が成り立つので，$x \geq 2$ より命題 3.38(c) から

$$0 = \left(\frac{rsxy}{x}\right) = \left(\frac{uvx^2 + ux + vx + 1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

が導かれて矛盾する． □

補題 3.41. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x(x \geq 2 \to \exists p(\mathrm{prime}(p) \wedge p|x))$

証明. x を任意にとって固定する．まず次は明らかになり立つ．

$$\exists v(x \geq 2 \to (v \geq 2 \wedge v|x)) \tag{3.14}$$

実際，$v = x$ とすればよい．よって最小値原理によって (3.14) を満たす最小の v が存在するので，それを p とおいたとき，この p が $\mathrm{prime}(p)$ を満たすことを示そう．自明な場合を除くために $x \geq 2$ としてよい．系 3.40 より $\forall y(y|p \to (y = 1 \vee y = p))$ を示せばよいので，まず $y|p$ となる y を任意にとり，$y \neq 1$ と仮定する．いま p の取り方から $p|x$ なので命題 3.38(a) より $y|x$ が成り立ち，y も (3.14) を満たすので，p の最小性から $p \leq y$ となる．したがって $y|p$ を思い出せば $y \leq p$ となり $y = p$ が成り立つ． □

補題 3.42. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y[(x \geq 1 \wedge y \geq 1 \wedge \neg\exists z(\mathrm{prime}(z) \wedge z|x \wedge z|y)) \leftrightarrow (x, y) = 1]$

証明. x, y を固定しておく．まず $(x, y) = 1$ とすると，$x \geq 1 \wedge y \geq y \wedge \forall u(u|x \wedge u|y \to u = 1)$ だから $z|x \wedge z|y$ を満たす z について $\neg\mathrm{prime}(z)$ は明らか．

逆に $x \geq 1 \wedge y \geq 1 \wedge \neg\exists z(\mathrm{prime}(z) \wedge z|x \wedge z|y)$ と仮定する．$u|x \wedge u|y$ を満たす u を任意にとり，$u \geq 2$ と仮定する．すると補題 3.41 よりある p によって $\mathrm{prime}(p) \wedge p|u$ となる．するとこのとき $|$ の推移性から $p|x \wedge p|y$ となるので仮定より $\neg\mathrm{prime}(p)$ が導かれて矛盾する．したがって $u < 2$ となり，$u \neq 0$ より $u = 1$ が分かる． □

次の補題は,

$$x+1, 2x+1, \ldots, yx+1 \tag{3.15}$$

がすべて $z(\neq 0)$ と互いに素なら,z と互いに素な w で,(3.15) の全ての $xi+1$ で割り切れるものが存在するという事実が RCA_0 で証明可能であることを意味する.$\mathbb{N}$ ならその総乗をとればよい.

補題 3.43.

$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y, z[\forall i < y((i+1)x+1, z) = 1 \land z \neq 0 \to \exists w((w, z) = 1 \land \forall i < y((i+1)x+1|w))]$

証明. x, y, z を固定し,以下の $\Sigma_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式を $\theta(k, x, y, z)$ とおく.

$$\forall i < y((i+1)x+1, z) = 1 \land z \neq 0 \to \exists w((w, z) = 1 \land \forall i < k((i+1)x+1|w)$$

$\forall k \leq y\theta(k, x, y, z)$ を k による y までの高々帰納法で示せば十分.自明な場合を除くために

$$\forall i < y((i+1)x+1, z) = 1 \land z \neq 0 \tag{3.16}$$

としておく.$k=0$ なら $w=1$ が条件を満たす.$k<y$ なる k で $w(w, z) = 1 \land \forall i < k((i+1)x|w)$ とすると,$w' = w((k+1)x+1)$ が条件を満たすことを確認しよう.

<u>Claim1:</u> $(w', z) = 1$

補題 3.42 によって示す.もし仮に $\mathrm{prime}(p) \land p|w' \land p|z$ となる p が存在すれば,特に $p|w((k+1)x+1)$ より $p|w$ または $p|((k+1)+1)$ である.$p|w$ とすると補題 3.42 から $(z, w) = 1$ に矛盾する.$p|((k+1)+1)$ としよう.いま $k<y$ なので,式 (3.16) より $((k+1)x+1, z) = 1$ であり,再び補題 3.16 から $p \not| z$ が導かれて矛盾する.以上からそのような p は存在せず,Claim1 の結論を得る.

<u>Claim2:</u> $\forall i < k+1 \ ((i+1)x+1|w)$

いま $\forall i < k((i+1)x+1|w)$ であるので,$|$ の推移性と w' の定義から明らか. □

補題 3.44. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y\exists z[z > x \land \forall i, j < y(i \neq j \to (z(i+1)+1, z(j+1)+1) = 1)]$

証明. <u>Claim:</u> $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y\exists z(z > x \land \forall i < y(i+1)|z)$

x を固定し,y に関する帰納法で示す.$y=0$ なら $z = x+1$ でよく,y について

$$\forall i < y((i+1)|z_y)$$

なる z_y をとると,$z = z_y(y+1)(>x)$ によって $\forall i < y+1((i+1)|z)$ が成り立つ.Claim の証明終わり.

x, y を任意にとって固定しておく.先の Claim によって $z_y > x \land \forall i < y(i+1)|z_y$ を満たす z_y をとり,また $i<j<y$ なる i, j をとる.$\mathrm{prime}(p)$ なる p を任意にとったとき,

$$\neg(p|(z(i+1)+1) \land p|(z(j+1)+1))$$

を示せば補題 3.42 より十分である.もし仮に $p|(z_y(i+1)+1)$ かつ $p|(z_y(j+1)+1)$ であったとすると,$p|(z_y(j+1)+1) - (z_y(i+1)+1)$ すなわち $p|z_y(j-i)$ が成り立ち,$\mathrm{prime}(p)$ の定義よ

り $p|z_y$ または $p|(j-i)$ である．$p|(j-i)$ とすると，$j-i<y$ と z_y の取り方から $(j-i)|z_y$ であるので，結局 $p|z_y$ である．したがって $p|z_y(i+1)$ であるが，いま $p|(z_y(i+1)+1)$ でもあったので命題 3.38 より $p=1$ が導かれて矛盾する． □

命題 3.45. 以下が成り立つ．

(1) $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x,y,a(x \equiv y \mod n \to a+x \equiv a+y \mod n)$

(2) $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x,y,a(x \equiv y \mod n \to ax \equiv ay \mod n)$

証明. 帰納法は使わず容易に示せる． □

補題 3.46. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall a,m,x,y\exists a',m'\left[\forall i<y\left(\frac{a'}{m'(i+1)+1}\right)=\left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right)\land\left(\frac{a'}{m'(y+1)+1}\right)=x\right]$

証明. a,m,x,y を任意にとって固定しておく．補題 3.44 より，

$$m' > \max(x,m) \land \forall i,j \le y(i \neq j \to (m'(i+1)+1, m'(j+1)+1)=1) \tag{3.17}$$

を満たす m' がとれる．

Claim: $\forall k \le y\exists b\forall i<k\left(\frac{b}{m'(i+1)+1}\right)=\left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right)$

k による y までの高々帰納法で示す $k=0$ は示すべきことは何もない．$k<y$ について b_k を以下を満たすようにとる．

$$\forall i<k\left(\frac{b_k}{m'(i+1)+1}\right)=\left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right) \tag{3.18}$$

ここで補題 3.43 における z を $m'(k+1)+1$ と見ると

$$(w, m'(k+1)+1)=1 \land \forall i<k((m'(i+1)+1)|w) \tag{3.19}$$

を満たす w が取れる．補題 3.39 より

$$uw \equiv 1 \mod m'(k+1)+1 \tag{3.20}$$

で $u<m'(k+1)+1$ を満たす u が存在する．ここで $z=\left(\frac{a}{m(k+1)+1}\right)$ とおき，さらに $v=b_km'(k+1)+z$ とおく．最後に $b'=b_k+uvw$ とおく．帰納法を完成させるために $\forall i<k+1\left(\frac{b'}{m'(i+1)+1}\right)=\left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right)$ を示す．まず $i<k$ のときは式 (3.19) より $(m'(i+1)+1)|w$ であるから b' の定義より

$$\begin{aligned}\left(\frac{b'}{m'(i+1)+1}\right)&=\left(\frac{b_k+uvw}{m'(i+1)+1}\right)\\&=\left(\frac{b_k}{m'(i+1)+1}\right)\\&=\left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right) && (\because \text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

であり，k の場合は

$$
\begin{aligned}
uw &\equiv 1 && \mod m'(k+1)+1 && (\because \text{式 } (3.20)) \\
\Rightarrow uvw &\equiv v && \mod m'(k+1)+1 && (\because \text{命題 } 3.45) \\
\Rightarrow (b' =) b_k + uvw &\equiv b + v && \mod m'(k+1)+1 && (\because \text{命題 } 3.45) \\
&\equiv b_k + b_k m'(k+1) + z && \mod m'(k+1)+1 \\
&\equiv b_k(m'(k+1)+1) + z && \mod m'(k+1)+1 \\
&\equiv z && \mod m'(k+1)+1
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{b'}{m'(k+1)+1}\right) &= \left(\frac{z}{m'(k+1)+1}\right) \\
&= z && (\because m' > \max(x, m) \geq m) \\
&= \left(\frac{a}{m(k+1)+1}\right)
\end{aligned}
$$

Claim の証明終わり．

示した Claim によって特に $k = y$ とすると

$$\forall i < y \left(\frac{b}{m'(i+1)+1}\right) = \left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right)$$

を満たす b が存在する．この b から Claim と同様の方法で条件を満たす a' を構成する．つまり，補題 3.43 より

$$(w, m'(y+1)+1) = 1 \wedge \forall i < y((m'(i+1)+1)|w) \tag{3.21}$$

なる w をとり，補題 3.39 から

$$uw \equiv 1 \mod m'(y+1)+1$$

で $u < m'(y+1)+1$ を満たす u をとり，$v = bm'(y+1)+x$ とおき最後に $a' = b + uvw$ とおく．このとき $i < y$ なる i については

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a'}{m'(i+1)+1}\right) &= \left(\frac{b+uvw}{m'(i+1)+1}\right) \\
&= \left(\frac{b}{m'(i+1)+1}\right) && (\because (m'(y+1)+1)|w) \\
&= \left(\frac{a}{m(i+1)+1}\right)
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
uw &\equiv 1 && \mod m'(y+1)+1 && (\because \text{式 } (3.3)) \\
\Rightarrow (a' =) b + uvw &\equiv b + v && \mod m'(k+1)+1 && (\because \text{命題 } 3.45) \\
&\equiv b + bm'(y+1) + x && \mod m'(y+1)+1 \\
&\equiv b(m'(y+1)+1) + x && \mod m'(y+1)+1 \\
&\equiv x && \mod m'(y+1)+1
\end{aligned}
$$

より

$$\left(\frac{a'}{m'(y+1)+1}\right) = \left(\frac{x}{m'(y+1)+1}\right)$$
$$= x \qquad (\because m' > \max(x,m) \geq x)$$

□

補題 3.47 (RCA$_0$，再掲)**.** 次が成り立つ．$(x)_y = z$ について次が（RCA$_0$ で）成り立つ．

(a) $\forall x, y \exists ! z((x)_y = z)$

(b) $\forall x, y((x)_y \leq x)$

(c) $\forall x \exists y((y)_0 = x)$

(d) $\forall x, y, z \exists w((\forall i < z (w)_i = (y)_i) \land (w)_z = x)$

証明. (a) $(x)_y = z$ において使われている関数の well-defined 性から明らか．

(b) 明らか．

(c) $y = \langle x, x \rangle$ を考えよ．

(d) 補題 3.46 がちょうどそれである． □

3.4 Σ^0_1 論理式の正規形定理

定理 3.48 (Σ^0_1 正規形定理)**.** 任意の Σ^0_1 論理式 $\varphi(X)$ について，以下を満たす Δ^0_0 論理式 $\theta(s)$ が存在する．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall X(\varphi(X) \leftrightarrow \exists n \theta(X[n]))$$

証明. 以下の証明のアイデアは Simpson [1] Lemma XI.2.4 の証明による．

この証明中限定の用語として，$\exists n \theta(X[n])$ where $\theta \in \Delta^0_0$ の形を $\Sigma^0_1(X)$ 正規形とよぶ．

まず Δ^0_0 の任意の $\mathrm{L}_2(X)$ 論理式 $\varphi(X)$ について，それと同値な $\Sigma^0_1(X)$ 正規形論理式 $\overline{\varphi(X)}$ が存在することを Δ^0_0 論理式の構成に関する帰納法で示す．

以下で論理式中に現れる $\sigma \subseteq \tau$ の $\subseteq$ は有限列の包含関係を表し，$\forall \sigma \subseteq \tau(hogehoge)$ は $\forall \sigma(\sigma \subseteq \tau \to hoehoge)$ の略記である．これが有界量化にできることについては定理 1.28 の注を参照せよ．

まず考える論理式は $\neg$ を中に押し込むことで，原子論理式にのみ $\neg$ がついているとしてよい．

Base Step:

$$\overline{\varphi(X)} := \begin{cases} \exists j(t_1 < t_2 \land [] \subseteq X[j]) & \text{if } \varphi(X) \equiv t_1 < t_2 \\ \exists j(t+1 = j \land X[j](t) = 1) & \text{if } \varphi(X) \equiv t \in X \\ \exists j(t+1 = j \land X[j](t) = 0) & \text{if } \varphi(X) \equiv t \notin X \end{cases}$$

Induction Step:

Case1: $\varphi(X) \equiv \varphi_1(X) \land \varphi_2(X)$ のとき．

帰納法の仮定より φ_1, φ_2 についてはそれぞれ

$$\varphi_1(X) \leftrightarrow \exists j\theta_1(X[j_1])$$
$$\varphi_2(X) \leftrightarrow \exists j\theta_2(X[j_1])$$

が成り立つ θ_1, θ_2 がある．このとき，

$$\varphi(X) \leftrightarrow \underbrace{\exists j(\exists\sigma_1, \sigma_2 \subseteq X[j](\theta(\sigma_1) \land \theta(\sigma_2)))}_{\overline{\varphi(X)}}$$

$\lor$ も同様．

Case2: $\varphi(X) \equiv \exists i < t\varphi_1(i, X)$ のとき．

帰納法の仮定より φ_1 について

$$\varphi_1(i, X) \leftrightarrow \exists j\theta_1(i, X[j])$$

が成り立つ θ_1 がある．このとき，

$$\varphi(X) \leftrightarrow \exists i < t\exists j\theta_1(X[j]) \leftrightarrow \underbrace{\exists j\exists i < t\theta_1(X[j])}_{\overline{\varphi(X)}}$$

なのでよい．

Case3: $\varphi(X) \equiv \forall i < t\varphi_1(i, X)$ のとき．

帰納法の仮定より φ_1 について

$$\varphi_1(i, X) \leftrightarrow \exists j\theta_1(i, X[j])$$

が成り立つ θ_1 がある．このとき，命題 3.14 より次が成り立つ．

$$\varphi(X) \leftrightarrow \forall i < t\exists j\theta_1(i, X[j]) \leftrightarrow \exists n\forall i < t\exists j < n\theta_1(i, X[j]) \leftrightarrow \underbrace{\exists n\forall i < t\exists\sigma \subseteq X[n]\theta_1(i, \sigma)}_{\overline{\varphi(X)}}$$

以上で Δ^0_0 の $\mathrm{L}_2(X)$ 論理式については，それと同値な $\Sigma^0_1(X)$ 正規形論理式が存在すると分かった．

次に $\varphi(X)$ を Σ^0_1 論理式とする．このとき Δ^0_0 論理式 $\theta(i, X)$ で $\varphi(X)$ は $\exists i\theta(i, X)$ と書ける．ここで先ほど示したことを使うと，次を満たす θ' が見つかる．

$$\theta(i, X) \leftrightarrow \exists n\theta'(i, Xn)$$

よって
$$\varphi(X) \leftrightarrow \exists i\exists n\theta'(i, X[n]) \leftrightarrow \exists m(\exists i \leq m\exists\sigma \subseteq X[m]\theta'(i, \sigma))$$

よりよい． □

3.5 Δ_0 論理式の充足関係 $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ の構成

この節の内容は Kaye [4] の 9 章を参考にしている．テキスト中で Σ_2 帰納法が必要だったところは同テキストの演習問題を参考に Σ_1 帰納法で示し直した．

3.5.1 配列操作関数とゲーデル数

定義 3.49 (再掲，RCA_0)**.** 関数 $\mathrm{lh}(x)$ と $[x]_y$ を以下によって定める．

- $\mathrm{lh}(x) = y :\leftrightarrow (x)_0 = y$
- $[x]_y = z :\leftrightarrow (y \geq \mathrm{lh}(x) \land z = 0) \lor (y < \mathrm{lh}(x) \land (x)_{y+1} = z)$

$\min\{\, z \mid \varphi(z) \,\}$ による定義と例は構文糖衣 1.29 を見よ．

定義 3.50 (再掲，RCA_0，メタ有限個の自然数のコード)**.** 各 $n \in \omega$ に対し，

$$\begin{aligned}[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] &:= \min\{\, z \mid \mathrm{lh}(z) = n \land [z]_0 = x_0 \land [z]_1 = x_1 \land \cdots \land [z]_{n-1} = x_{n-1} \,\} \\ [\,] &:= \min\{\, z \mid \mathrm{lh}(z) = 0 \,\}\end{aligned}$$

定義 3.51. $\mathrm{last}(x) = y \leftrightarrow [x]_{\mathrm{lh}(x)-1} = y$

注 3.52. $\forall x([[x]]_0 = x)$ である．

定義 3.53 (連結)**.**

$$x^\frown y = \min\left\{ z \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{lh}(z) = \mathrm{lh}(x) + \mathrm{lh}(y) \land \\ \forall i < \mathrm{lh}(x)([z]_i = [x]_i) \land \forall j < \mathrm{lh}(y)([z]_{\mathrm{lh}(x)+j} = [y]_j) \end{array} \right\}$$

注 3.54. $\mathrm{lh}(x^\frown y) = \mathrm{lh}(x) + \mathrm{lh}(y) \geq \max(\mathrm{lh}(x), \mathrm{lh}(y))$.

定義 3.55 (制限)**.**

$$x \upharpoonright y = \min\{\, w \mid \mathrm{lh}(w) = y \land \forall i < \mathrm{lh}(w)([w]_i = [x]_i) \,\}$$

定義 3.56 (置換)**.**

$$x[y/z] = \min\left\{ w \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{lh}(w) = \max(\mathrm{lh}(x), z+1) \land \\ \forall i < \mathrm{lh}(w)\{(i = z \to [w]_i = y) \land (i \neq z \to [w]_i = [x]_i)\} \end{array} \right\}$$

定義 3.57 (部分)**.**

$$\begin{aligned} x \subseteq_{\mathrm{p}} y \leftrightarrow \mathrm{lh}(x) \leq \mathrm{lh}(y) \land & \exists i \leq \mathrm{lh}(y) - \mathrm{lh}(x)[\forall j < \mathrm{lh}(x)([x]_j = [y]_{i+j})] \land \\ & \underbrace{\forall z < x(\mathrm{lh}(z) \neq \mathrm{lh}(x) \lor \exists i < \mathrm{lh}(x)([x]_i \neq [z]_i))}_{x\text{ の最小性}} \end{aligned}$$

これは例えば $[1,3,2,7] \subseteq_{\mathrm{p}} [9,8,1,3,2,7,11]$ のように，x がコードする列が y に連続的に含まれているという関係である．この $x \subseteq_{\mathrm{p}} y$ の定義 2 行目で x に最小性を要求しているのは次の補題を成立させるためである．

補題 3.58. $\Sigma^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ と $\Pi^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ は以下の部分量化に閉じる

$$\forall x(x \subseteq_{\mathrm{p}} y \to \cdots), \quad \exists x(x \subseteq_{\mathrm{p}} y \land \cdots)$$

証明. まず $x \subseteq_{\mathrm{p}} y$ は Δ_0 論理式であることに留意せよ．命題 3.13 より，$\Sigma^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ と $\Pi^0_1(\mathrm{RCA}_0)$ はそれぞれ有界量化に閉じる．よって $\theta(x,y,z)$ を Σ^0_1 論理式とすると，$\forall x(x \subseteq_{\mathrm{p}} y \to \theta(x,y,z))$ は次と同値になる．

$$\begin{aligned}\exists l[l = \mathrm{lh}(y) \land \forall i,j \leq l[i+j \leq l \to \exists x\{\mathrm{lh}(x) = j \land \forall k < j([x]_k = [y]_{i+k})\land \\ \forall u < x(\mathrm{lh}(u) \neq j) \lor \exists k < j([u]_k \neq [y]_{i+k}) \land \theta(x,y,z)\}]\end{aligned}$$

次に $\theta(x,y,z)$ を Π_1 論理式とすると，$\exists x(x \subseteq_{\mathrm{p}} y \land \theta(x,y,z))$ は次と同値．

$$\begin{aligned}\forall l[l = \mathrm{lh}(y) \to \exists i,j \leq l[i+j \leq l \land \forall x\{\mathrm{lh}(x) = j \land \forall k < j([x]_k = [y]_{i+k})\land \\ \forall u < x(\mathrm{lh}(u) \neq j) \lor \exists k < j([u]_k \neq [y]_{i+k}) \to \theta(x,y,z)\}]\end{aligned}$$

□

ゲーデル数を定義する準備ができた．それによって様々な形式的定義（例えば論理式とは何か，項とは，Δ_0 論理式とは何かなど）を RCA_0 の内部で行うことが可能になる．最初のステップは，一階の言語 L_1 の各記号 s に固有の自然数 $\nu(s)$ を割り当てることである．これは例えば下のテーブルのようにすればよい．これ自身が左の記号のゲーデル数ではないことに注意せよ．

L_1 の記号,s	自然数,$\nu(s)$
0	0
1	1
$+$	2
$\cdot$	3
$<$	4
$=$	5
$\land$	6
$\lor$	7
$\neg$	8
$\exists$	9
$\forall$	10
(	11
)	12
v_i	$\langle 13, i\rangle$

記号の列 $\sigma = s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$ に対するゲーデル数$\ulcorner\sigma\urcorner$を，列 $\nu(s_0), \nu(s_1), \ldots, \nu(s_{n-1})$ をコードする最小の自然数 x と定義する．

定義 3.59 (x はゲーデル数)**.**

$$\begin{aligned}\mathrm{GN}(x) \leftrightarrow \forall i < \mathrm{lh}(x)([x]_i \leq 12 \vee \exists j \leq x[x]_i = \langle 13, i\rangle)\wedge \\ \forall w < x(\mathrm{lh}(w) \neq \mathrm{lh}(x) \vee \exists j < \mathrm{lh}(x)[x]_i \neq [w]_i)\end{aligned}$$

例 3.60. $\ulcorner + \urcorner = [2] \neq 2$，$\ulcorner 0 = 1 \urcorner = [0,5,1]$，$\ulcorner \exists (\urcorner = [9,11]$

x, y がゲーデル数ならその連結 $x^\frown y$ もまたゲーデル数である．

例 3.61. $x = [8,11,11,1,2] = \ulcorner \neg((1+ \urcorner$，$y = [1,12,5,0,12] = \ulcorner 1) = 0) \urcorner$ とすれば，$x^\frown y = [8,11,11,1,2,1,12,5,0,12] = \ulcorner \neg((1+1) = 0) \urcorner$ である．

$\mathrm{GN}(x)$ に最小性を課したことによって $\subseteq_{\mathrm{p}}$ に関して以下が成り立つ．

- $\forall x(\mathrm{GN}(x) \to x \subseteq_{\mathrm{p}} x)$
- $\forall x, y, z(x \subseteq_{\mathrm{p}} y \wedge y \subseteq_{\mathrm{p}} z \to x \subseteq_{\mathrm{p}} z)$
- $\forall x, y(x \subseteq_{\mathrm{p}} y \wedge y \subseteq_{\mathrm{p}} x \to x = y)$

3.5.2 "x は数項" を表す $\mathrm{term}(x)$，Δ_0 論理式のゲーデル数" を表す $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ の構成

ここでは "x は Δ_0 論理式のゲーデル数である" を意味する関係 $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ を得ることが目標である．定義のアイデアはシンプルで，x が Δ_0 論理式であることを，その Δ_0 論理式の帰納的構成が存在することと定めるのだが，このアイデアでは $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ は Σ_1 論理式にしかならない．$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ へは Δ_1 であることを要求するので $\Pi_1(\mathrm{RCA}_0)$ であることを示すのだが，そのためには少し技術的な工夫を凝らすことになる．$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ に関する証明の本質的なアイデアはすべて $\mathrm{term}(x)$ という "x は項のゲーデル数である" を意味する関係を得る過程で得られるので，まずはここからはじめる．

定義 3.62. まず $\mathrm{termseq}(s)$ を次の L_1 論理式と定める．

$$\begin{aligned}\forall i < \mathrm{lh}(s)\{[s]_i = \ulcorner 0 \urcorner \vee [s]_i = \ulcorner 1 \urcorner \vee \exists j \leq s([s]_i = \ulcorner \mathsf{v}_i \urcorner)\vee \\ \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner ([s]_j + [s]_k) \urcorner)\vee \\ \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner ([s]_j \cdot [s]_k) \urcorner)\}\end{aligned}$$

次に $\mathrm{term}(x)$ を $\exists s\ \mathrm{termseq}(s^\frown[x])$ という L_1 論理式で定める．

つまりここでは x が項であることを，x を構成する正当な項の帰納的過程 s が存在することと定義している．$\mathrm{termseq}(s)$ は明らかに $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式であるので $\mathrm{term}(x)$ が $\Sigma_1(\mathrm{RCA}_0)$ であることは即座に分かる．ここからは $\mathrm{term}(x)$ が実際は $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ であることを示していく．

命題 3.63. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall s, x(\mathrm{lh}(s^\frown[x]) = \mathrm{lh}(s) + 1 \wedge \mathrm{last}(s^\frown[x]) = x)$

よって $\mathrm{term}(x) \leftrightarrow \exists u(\mathrm{termseq}(u) \wedge \mathrm{last}(u) = x)$ である．

命題 3.64. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall s, \forall y < \mathrm{lh}(s)((s \upharpoonright y)^\frown[[s]_y] = s \upharpoonright (y+1))$

証明. $s, y < \mathrm{lh}(s)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(s \upharpoonright y)^\frown[[s]_y] &= \min\left\{ z \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{lh}(z) = \mathrm{lh}(s \upharpoonright y) + \mathrm{lh}([[s]_y]) \wedge \forall i < \mathrm{lh}(s \upharpoonright y)([z]_i = [s \upharpoonright y]_i) \\ \wedge \forall j < \mathrm{lh}([[s]_y])([z]_{j+\mathrm{lh}(s\upharpoonright y)} = [[[s]_y]]_j) \end{array} \right\} \\
&= \min\{\, z \mid \mathrm{lh}(z) = y+1 \wedge \forall i < y([z]_i = [s \upharpoonright y]_i) \wedge \forall j < 1([z]_{j+y} = [[[s]_y]]_j)\,\} \\
&= \min\{\, z \mid \mathrm{lh}(z) = y+1 \wedge \forall i < y([z]_i = [s \upharpoonright y]_i) \wedge [z]_y = [s]_y \,\} \\
&= \min\{\, z \mid \mathrm{lh}(z) = y+1 \wedge \forall i < y+1([z]_i = [s]_i)\,\} \\
&= s \upharpoonright (y+1)
\end{aligned}
$$

□

命題 3.65. 次が RCA_0 で証明可能

(1) $\forall s(\mathrm{termseq}(s) \to \forall y \le \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{termseq}(s \upharpoonright y))$
(2) $\forall s(\mathrm{termseq}(s) \to \forall y < \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{GN}([s]_y))$
(3) $\forall s(\mathrm{termseq}(s) \to \forall y < \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{term}([s]_y))$
(4) $\forall t[\mathrm{term}(t) \leftrightarrow (t = \ulcorner 0 \urcorner \vee t = \ulcorner 1 \urcorner \vee \exists j \le t(t = \ulcorner \mathsf{v}_j \urcorner) \vee$
$\exists r, s \subseteq_{\mathrm{p}} t(\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge (t = \ulcorner (r+s) \urcorner \vee t = \ulcorner (r \cdot s) \urcorner))]$

証明. (1) 定義から明らか.

(2) s を固定し，$\mathrm{lh}(s) - 1$ までの y に関する帰納法で容易に示せる.

(3) $\mathrm{termseq}(s)$ で $y < \mathrm{lh}(s)$ とすると $\mathrm{termseq}((s \upharpoonright y)^\frown[[s]_y])$

(4) $(\to)$ $\mathrm{term}(t)$ とするとある u で $\mathrm{termseq}(u) \wedge \mathrm{last}(u) = t$ となるから

$$
\begin{aligned}
&t = \ulcorner 0 \urcorner \vee t = \ulcorner 1 \urcorner \vee \exists j \le u(t = \ulcorner \mathsf{v}_j \urcorner) \vee \\
&\exists j, k < \mathrm{lh}(u)(t = \ulcorner ([u]_j + [u]_k) \urcorner) \vee \\
&\exists j, k < \mathrm{lh}(u)(t = \ulcorner ([u]_j \cdot [u]_k) \urcorner)
\end{aligned}
$$

が成り立ち (3) からよい.

$(\leftarrow)$ $t = \ulcorner 0 \urcorner \vee t = \ulcorner 1 \urcorner \vee \exists j \le t(t = \ulcorner \mathsf{v}_j \urcorner)$ の場合は明らか．$r, s \subseteq_{\mathrm{p}} t$ で

$$\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge t = \ulcorner (r+s) \urcorner$$

を満たすものが存在したとする．このとき term の定義から $\mathrm{termseq}(u_r^\frown[r]) \wedge \mathrm{termseq}(u_s^\frown[s])$ を満たす u_r と u_s が存在し，$w = u_r^\frown[r]^\frown u_s^\frown[s]$ によって $\mathrm{termseq}(w^\frown[t])$ となる．$t = \ulcorner (r \cdot s) \urcorner$ の場合も同様. □

補題 3.66 (項の一意解読性)**.** $*, *'$ は $+$ か $\cdot$ とする．次が RCA_0 で証明可能

(a) $\forall x, y(\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(x^\frown y) \to \mathrm{lh}(y) = 0)$
(b) $\forall x, y(\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(y^\frown x) \to \mathrm{lh}(y) = 0)$

(c) $\forall x, y, r, s(\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(y) \wedge \mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge \ulcorner(x * y)\urcorner \subseteq_{\mathrm{p}} \ulcorner(r *' s)\urcorner$

$$\to \left\{ \begin{array}{c} \ulcorner(x * y)\urcorner \subseteq_{\mathrm{p}} r \vee \\ \ulcorner(x * y)\urcorner \subseteq_{\mathrm{p}} s \vee \\ (x = r \wedge y = s \wedge * = *') \end{array} \right\})$$

証明. (a) 次がすべての z で成り立つことを z に関する帰納法で示せば十分.

$$\forall x, y[\mathrm{lh}(x^\frown y) \leq z \wedge \mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(x^\frown y) \to \mathrm{lh}(y) = 0)]$$

$z = 0$ なら明らか．$\mathrm{lh}(x^\frown y) \leq z+1 \wedge \mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(x^\frown y)$ を満たす x, y を任意にとる．$\mathrm{lh}(x) = 1$ の場合 x は定数か変数であるので $[x^\frown y]_0 = [x]_0 \neq \ulcorner(\urcorner$ となり $x^\frown y$ も定数か変数である．よって $1 = \mathrm{lh}(x^\frown y) = \mathrm{lh}(x) + \mathrm{lh}(y)$ すなわち $\mathrm{lh}(y) = 0$ を得る．$\mathrm{lh}(x) > 1$ の場合を考える．このとき以下を満たす r, s, p, q が存在する．ただし $*, *'$ は $+$ か $\cdot$ である．

$$\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge x = \ulcorner(r * s)\urcorner \wedge$$
$$\mathrm{term}(p) \wedge \mathrm{term}(q) \wedge x^\frown y = \ulcorner(p *' q)\urcorner$$

Claim (a)-1: $\mathrm{lh}(r) = \mathrm{lh}(p)$

もし仮に $\mathrm{lh}(r) \neq \mathrm{lh}(p)$ だったとする．$\mathrm{lh}(r) < \mathrm{lh}(p)$ とすると，$\mathrm{lh}(w) > 0$ なる w によって $r^\frown w = p$ と書けるが，$\mathrm{lh}(r^\frown w) = \mathrm{lh}(p) < \mathrm{lh}(x^\frown y) \leq z + 1$ より $\mathrm{term}(r^\frown w) \leq z$ であるので帰納法の仮定より $\mathrm{lh}(w) = 0$ が導かれて矛盾する．逆に $\mathrm{lh}(r) > \mathrm{lh}(p)$ としても同様にある w で $p^\frown w = r$ となり，$\mathrm{lh}(p^\frown w) = \mathrm{lh}(r) < \mathrm{lh}(x) \leq z + 1$ から帰納法の仮定で矛盾が導かれる．Claim (a)-1 の証明終わり．

したがって $r = p$ および $* = *'$ が成り立つ．$\mathrm{lh}(x) \leq \mathrm{lh}(x^\frown y)$ なので $\mathrm{lh}(s) \leq \mathrm{lh}(q)$ である．よってある w によって $s^\frown w = q$ と書けるので，Claim (a)-1 と同じ議論によって $\mathrm{lh}(s) = \mathrm{lh}(q)$ も結論できる．ゆえに $\mathrm{lh}(x^\frown y) = \mathrm{lh}(x) + \mathrm{lh}(y) = \mathrm{lh}(x)$ より $\mathrm{lh}(y) = 0$ を得ることができた．

(b) 先ほどの (a) の証明では前から項の長さをそろえていた．(b) では逆に後ろから項の長さをそろえていけばよい．

(c) r, s を $\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s)$ を満たすようにとって固定し，$*'$ も固定する．このとき $(a), (b)$ より

$$\forall v(\mathrm{term}(v) \wedge v \subseteq_{\mathrm{p}} \ulcorner(r *' s)\urcorner \to v \subseteq_{\mathrm{p}} r \vee v \subseteq_{\mathrm{p}} s \vee v = \ulcorner(r *' s)\urcorner)$$

を示せばよく，さらにこれは次を示せば十分.

$$\begin{aligned} &\forall z \forall u, v, w(\mathrm{term}(v) \wedge \mathrm{lh}(v) \leq z \wedge u^\frown v^\frown w = \ulcorner(r *' s)\urcorner \\ &\qquad \to \mathrm{lh}(w) \geq \mathrm{lh}(s) + 2 \vee \mathrm{lh}(u) \geq \mathrm{lh}(r) + 2 \vee \mathrm{lh}(u) = \mathrm{lh}(w) = 0) \end{aligned}$$

z に関する帰納法で示す．長さ 0 の項は存在しないので $z = 0$ なら前提偽である．$z = 1$ のとき，$\mathrm{term}(v)$ なる v は変数か定数であるので，$v \subseteq_{\mathrm{p}} r$ か $v \subseteq_{\mathrm{p}} s$ のいずれかである．$u^\frown v^\frown w = \ulcorner(r*'s)\urcorner$ なる u, w を任意にとると，前者の場合 $w \supseteq_p \ulcorner *'s)\urcorner$ なので

$$\mathrm{lh}(w) \geq \mathrm{lh}(\ulcorner *'s)\urcorner) = \mathrm{lh}(s) + 2$$

となる．後者の場合も同様に $u \subseteq_p \ulcorner(r*'\urcorner$ より $\mathrm{lh}(u) \geq \mathrm{lh}(r)+2$ となるのでよい．

$z \geq 1$ で成り立つと仮定する．いま $\mathrm{term}(v) \wedge \mathrm{lh}(v) = z+1 \wedge u^\frown v^\frown w = \ulcorner(r *' s)\urcorner$ なる u, v, w を任意にとれば，特に $\mathrm{lh}(v) = z+1 \geq 2$ から v は変数や定数ではない．したがってある $x, y \subseteq_\mathrm{p} v$ で

$$\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(y) \wedge \ulcorner(x * y)\urcorner = v$$

となる．ただし $*$ は $+$ か $\cdot$ である．このとき

$$\mathrm{lh}(\ulcorner(x * y)\urcorner) = \mathrm{lh}(x) + \mathrm{lh}(y) + 3 = \mathrm{lh}(v) = z+1$$

より $\mathrm{lh}(x), \mathrm{lh}(y) \leq z$ である．また

$$u^\frown v^\frown w = u^\frown \ulcorner(x * y)\urcorner^\frown w = \ulcorner(r *' s)\urcorner$$

であるので，x について

$$\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{lh}(x) \leq z \wedge u^\frown \ulcorner(x * y)\urcorner^\frown w = \ulcorner(r *' s)\urcorner$$

に帰納法の仮定を適用して

Case1x: $\mathrm{lh}(\ulcorner *y)\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{lh}(s)+2$
Case2x: $\mathrm{lh}(u^\frown \ulcorner(\urcorner) \geq \mathrm{lh}(r)+2$
Case3x: $\mathrm{lh}(\ulcorner *y)\urcorner^\frown w) = \mathrm{lh}(u^\frown \ulcorner(\urcorner) = 0$

の 3 パターンが得られる．まず Case3x はあり得ない．さらに Case1x と Case2x が同時に成り立つこともない．実際，もし両方成り立てば

$$\mathrm{lh}(u^\frown \ulcorner(\urcorner) + \mathrm{lh}(\ulcorner *y)\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{lh}(r) + \mathrm{lh}(s) + 4$$

だが，

$$\begin{aligned}\mathrm{lh}(u^\frown \ulcorner(\urcorner) + \mathrm{lh}(\ulcorner *y)\urcorner^\frown w) &= \mathrm{lh}(u^\frown \ulcorner(*y)\urcorner^\frown w)\\ &\leq \mathrm{lh}(u^\frown \ulcorner(x * y)\urcorner^\frown w)\\ &= \mathrm{lh}(\ulcorner(r *' s)\urcorner) = \mathrm{lh}(r) + \mathrm{lh}(s) + 3\end{aligned}$$

となり矛盾が生じる．

また y についても

$$\mathrm{term}(y) \wedge \mathrm{lh}(y) \leq z \wedge u^\frown \ulcorner(x * y)\urcorner^\frown w = \ulcorner(r *' s)\urcorner$$

に帰納法の仮定を適用して

Case1y: $\mathrm{lh}(\ulcorner)\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{lh}(s)+2$
Case2y: $\mathrm{lh}(u^\frown \ulcorner(x*\urcorner) \geq \mathrm{lh}(r)+2$
Case3y: $\mathrm{lh}(\ulcorner *y)\urcorner^\frown w) = \mathrm{lh}(u^\frown \ulcorner(\urcorner) = 0$

の 3 パターンが得られる．同様に Case3y はあり得ず，Case1y と Case2y が同時に成り立つこともない．したがって整理すると論理的には以下の 3 パターンがあり得る．

(1) $\mathrm{lh}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) \geq \mathrm{lh}(r)+2$
(2) $\mathrm{lh}(\ulcorner)\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{lh}(s)+2$
(3) $\mathrm{lh}(u^\frown\ulcorner(x*\urcorner) \geq \mathrm{lh}(r)+2$ かつ $\mathrm{lh}(\ulcorner*y)\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{lh}(s)+2$

(1) のとき: このとき $\mathrm{lh}(u) \geq \mathrm{lh}(r)+2$ であることを示す．もし仮に $\mathrm{lh}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) = \mathrm{lh}(r)+2$ だとすると，ある t によって $x^\frown t = s$ となる．すると $\mathrm{term}(x^\frown t)$ であるので (a) より $\mathrm{lh}(t)=0$ となり $x=s$ である．したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{lh}(r)+\mathrm{lh}(s)+3 = \mathrm{lh}(\ulcorner(r*' s)\urcorner) &= \mathrm{lh}(u^\frown\ulcorner(x*y)\urcorner^\frown w)\\ &= \mathrm{lh}(u^\frown\ulcorner(\urcorner)+\mathrm{lh}(x)+\mathrm{lh}(\ulcorner*y)\urcorner^\frown w)\\ &\geq \mathrm{lh}(r)+2+\mathrm{lh}(s)+3 \qquad (\because \mathrm{lh}(y)\geq 1)\end{aligned}$$

となり矛盾が導かれる．

(2) のとき: (1) 同様に $\mathrm{lh}(\ulcorner)\urcorner^\frown w) = \mathrm{lh}(s)+2$ と仮定すれば矛盾が生じ $\mathrm{lh}(w) \geq \mathrm{lh}(s)+2$ が結論できる．

(3) のとき: もし仮に片方でも等号が成り立たないとすると

$$\mathrm{lh}(\ulcorner(r*' s)\urcorner) = \mathrm{lh}(u^\frown\ulcorner(x*\urcorner)+\mathrm{lh}(\ulcorner*y)\urcorner^\frown w)-1 > \mathrm{lh}(r)+\mathrm{lh}(s)+3$$

が導かれて矛盾が生じる．したがって $\mathrm{lh}(u^\frown\ulcorner(x*\urcorner) = \mathrm{lh}(r)+2$ かつ $\mathrm{lh}(\ulcorner*y)\urcorner^\frown w) = \mathrm{lh}(s)+2$ が成り立つ．よって $*=*'$ であり，ある t_1, t_2 によって $t_1^\frown x = r$，$y^\frown t_2 = s$ となる．すると $(a),(b)$ から $\mathrm{lh}(t_1)=\mathrm{lh}(t_2)=0$ が結論できるので $\mathrm{lh}(u)=\mathrm{lh}(w)=0$ が得られたことになる．以上で帰納法が完了した． □

先の (c) の証明中で示したことは後で使うので切り抜いておく．

系 3.67. 以下 $*$ は $+$ か $\cdot$ のいずれかである．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall r,s,v(\mathrm{term}(r)\land\mathrm{term}(s)\land\mathrm{term}(v)\land v\subseteq_{\mathrm{p}}\ulcorner(r*s)\urcorner \to v\subseteq_{\mathrm{p}} r\lor v\subseteq_{\mathrm{p}} s\lor v=\ulcorner(r*s)\urcorner)$$

定義 3.68. （コードの所属）

$$x\in_c s \leftrightarrow \exists i<\mathrm{lh}(s)x=[s]_i$$

定義から $s\subseteq_{\mathrm{p}} s'$ のとき $x\in_c s$ なら $x\in_c s'$ が成り立つ．また $\neg x\in_c s$ は $x\notin_c s$ と書くことにする．

定義 3.69. 2 変数論理式 s determines-term(x) を次の論理式とする．

$$\forall i<\mathrm{lh}(s)([s]_i\subseteq_{\mathrm{p}} x)\land\mathrm{termseq}(s)\land\forall y(y\subseteq_{\mathrm{p}} x\land\mathrm{termseq}(s^\frown[y])\to y\in_c s)$$

インフォーマルに s determines-term(x) を言い換えると，「それ自身が項となるような x の部分を，s は過不足無く含んでいる」ということである．例えば s,x が s determines-term(x) を満た

すとすると，$a, b \in_c s \wedge \ulcorner(a+b)\urcorner \subseteq_{\mathrm{p}} x$ のとき $\ulcorner(a+b)\urcorner \in_c s$ が成り立つ．ここで x 自身は項でなくとも s determines-term(x) が成り立つことがある点に注意せよ．また補題 3.58 より，この論理式自体は $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ である．

命題 3.70. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, s(s \text{ determines-term}(x) \leftrightarrow s \text{ determines-term}(x \restriction \mathrm{lh}(x)))$

証明. $\forall y(y \subseteq_{\mathrm{p}} x \leftrightarrow y \subseteq_{\mathrm{p}} x \restriction \mathrm{lh}(x))$ より明らか． □

補題 3.71. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x \exists s(s \text{ determines-term}(x))$

証明. 先の命題より $\forall x \forall y \leq \mathrm{lh}(x) \exists s(s \text{ determines-term}(x \restriction y)))$ を示せばよい．そのために，$\varphi(x, y)$ を $\exists s(s \text{ determines-term}(x \restriction y))$ とおいて

$$\forall x[\varphi(x, 0) \wedge \forall y < \mathrm{lh}(x)(\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, y+1))]$$

を示せば十分．x を固定する．$\varphi(x, 0)$ は s として $[]$ を考えれば良い．$y < \mathrm{lh}(x)$ について $\varphi(x, y)$ を仮定する．するとある s によって

$$s \text{ determines-term}(x \restriction y)$$

となる．いま $x \restriction (y+1) = (x \restriction y)^\frown[[x]_y]$ における $[x]_y$ に応じて場合分けして考える．

<u>Case1:</u> $[x]_y = \ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner$ のとき．
$s^\frown[[x]_y]$ determines-term$(x \restriction (y+1))$ が成り立つことを示す． まず

$$\forall i < \mathrm{lh}(s)+1([s^\frown[[x]_y]]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x \restriction (y+1)) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[[x]_y])$$

は容易に確かめられる．あとは

$$\forall v(v \subseteq_{\mathrm{p}} x \restriction (y+1) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[[x]_y]^\frown[v]) \rightarrow v \in_c s^\frown[[x]_y])$$

を v の長さに関する $y+1$ までの高々帰納法で示す[*28]．v が定数や変数なら明らかなので $v = \ulcorner(r * t)\urcorner$（ただし $\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(t), *$ は $+$ か $\cdot$）の場合を考える．このとき v の最後尾は右括弧なので $v \subseteq_{\mathrm{p}} x \restriction y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[[x]_y]^\frown[v])$ と項の一意解読性 (c) より

$$r \subseteq_{\mathrm{p}} x \restriction y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[[x]_y]^\frown[r]) \wedge t \subseteq_{\mathrm{p}} x \restriction y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[[x]_y]^\frown[t])$$

であり，$\mathrm{lh}(r), \mathrm{lh}(t) < \mathrm{lh}(v)$ なので帰納法の仮定からある $i, j < \mathrm{lh}(s)+1$ が存在して $r = [s^\frown[[x]_y]]_i \wedge t = [s^\frown[[x]_y]]_j$ となる．あとは $i, j < \mathrm{lh}(s)$ を示せば帰納法が完了する．なぜならこのとき $v = \ulcorner([s]_i * [s]_j)\urcorner$ となって $\mathrm{termseq}(s^\frown[v])$ が導かれるので，s determines-term$(x \restriction y)$ より $v \in_c s$ となるからである．まずもし $\mathrm{lh}(r) = \mathrm{lh}(t) = 1$ なら，$r, t \subseteq_{\mathrm{p}} x \restriction y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[r]) \wedge$

[*28] 形式的には

$$\forall v, z\{(v \subseteq_{\mathrm{p}} x \restriction (y+1) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[[x]_y]^\frown[v]) \wedge \mathrm{lh}(v) \leq z) \rightarrow v \in_c s^\frown[[x]_y]\}$$

を，z に関する $y+1$ までの高々帰納法で示している．このように，長さを表す別の変数に関する帰納法を "長さに関する帰納法" と表現することにする．

$\mathrm{termseq}(s^\frown[t])$ なので，s determines-term$(x \upharpoonright y)$ から $i, j < \mathrm{lh}(s)$ が導かれる．次に $\mathrm{lh}(r) > 1$ とする．このとき $r \neq [[x]_y]$ なので，$i < \mathrm{lh}(s)$ となる．このとき $\mathrm{lh}(t) = 1$ なら $t \subseteq_{\mathrm{p}} x \upharpoonright y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[t])$ より $j < \mathrm{lh}(s)$ となりよい．$\mathrm{lh}(t) > 1$ でも，$t \neq [[x]_y]$ なので $j < \mathrm{lh}(s)$ となる．したがっていずれの場合も $i, j < \mathrm{lh}(s)$ が成り立つ．

Case2: $[[x]_y] = \ulcorner) \urcorner$ のとき．

もし $x \upharpoonright y$ が，ある r と $i, j < \mathrm{lh}(s)$ によって $\ulcorner r([s]_i * [s]_j \urcorner$（ここで $*$ は $+$ か $\cdot$）と書けないなら s determines-term$(x \upharpoonright (y+1))$ であることが容易に確かめられるので，そのように書けたとしてよい．このとき $s' = s^\frown[\ulcorner([s]_i * [s]_j)\urcorner]$ が s' determines-term$(x \upharpoonright (y+1))$ を満たすことを示す．まず $\forall i < \mathrm{lh}(s')([s']_i \subseteq_{\mathrm{p}} x \upharpoonright (y+1))$ と $\mathrm{termseq}(s')$ は明らか．$v \subseteq_{\mathrm{p}} x \upharpoonright (y+1) \wedge \mathrm{termseq}(s'^\frown[v])$ なる v を任意にとる．このとき $\mathrm{term}(v)$ であることに注意せよ．まず $\neg v \subseteq_{\mathrm{p}} x \upharpoonright y$ なら $v = \ulcorner([s]_i * [s]_j)\urcorner = \mathrm{last}(s')$ であるのでよい．$v \subseteq_{\mathrm{p}} x \upharpoonright y$ のときを考える．$\mathrm{lh}(v) = 1$ なら自明なので $\mathrm{lh}(v) \geq 2$ とすると，ある $l', k' < \mathrm{lh}(s') = \mathrm{lh}(s) + 1$ によって $v = \ulcorner([s']_{l'} * [s']_{k'})\urcorner$ となる．このとき $\mathrm{termseq}(s^\frown[[s']_{l'}]) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[[s']_{k'}])$ であるので，ある $l, k < \mathrm{lh}(s)$ によって $[s']_{l'} = [s]_l$, $[s']_{k'} = [s]_k$ となる．よって $\mathrm{termseq}(s^\frown[v])$ が得られて $v \in_c s$ すなわち $v \in_c s'$ が成り立つ．

Case3: $[[x]_y]$ がそれ以外のとき．

s determines-term$(x \upharpoonright (y+1))$ である．

□

補題 3.72.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, s, t(s \text{ determines-term}(x) \wedge t \text{ determines-term}(x) \to \forall i < \mathrm{lh}(s)[s]_i \in_c t)$$

証明． x, s, t を s determines-term$(x) \wedge t$ determines-term(x) を満たすようにとって固定する．このとき $\forall y \leq \mathrm{lh}(s) \forall i < y[s]_i \in_c t$ を y に関する高々帰納法で示す．$y = 0$ なら示すべきことがない．$\forall i < y[s]_i \in_c t$ とすると，示すべきは $[s]_y \in_c t$ である．まず $[s]_y$ が定数か変数なら即座に $\mathrm{termseq}(t^\frown[[s]_y])$ であるのでよい．次にある $i, j < y$ で $[s]_y = \ulcorner([s]_i * [s]_j)\urcorner(\subseteq_{\mathrm{p}} x)$ となっているとすると，帰納法の仮定から $[s]_i, [s]_j \in_c t$ となり $\mathrm{termseq}(t^\frown[[s]_y])$ であるから $[s]_y \in t$ が成り立つ． □

系 3.73.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, s, t(s \text{ determines-term}(x) \wedge t \text{ determines-term}(x) \to \forall y(y \in_c s \leftrightarrow y \in_c t))$$

命題 3.74.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x(\mathrm{term}(x) \leftrightarrow \forall s(s \text{ determines-term}(x) \to x \in_c s))$$

したがって $\mathrm{term}(x)$ は $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ である．

証明． x を任意に取って固定しておく．

($\leftarrow$) 補題 3.71 より s determines-term(x) を満たす s は存在し，$\mathrm{termseq}(s)$ より任意の $y \in_c s$ は $\mathrm{term}(y)$ である．よって仮定から $x \in_c s$ なので $\mathrm{term}(x)$ が成り立つ．

$(\to)$ s determines-term(x) かつ $x \in_c s$ を満たす s が一つでもあれば，系 3.73 よりすべての t determines-term(x) を満たす t が $x \in_c t$ も満たす．そのような s の存在を二段階に分けて示す．

まず term(x) より termseq$(t) \wedge$ last$(t) = x$ を満たす t が存在する．特に $x \in_c t \wedge x \subseteq_{\mathrm{p}} x$ に留意せよ．ここで論理式 φ を以下とする．

$$\varphi(y, x, t) := \exists s[\mathrm{termseq}(s) \wedge \forall i < \mathrm{lh}(s)([s]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x) \wedge \forall i < y([t]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x \to [t]_i \in s)]$$

<u>Claim1:</u> $\forall y \leq \mathrm{lh}(t)\varphi(y, x, t)$

y に関する lh(t) までの帰納法で示す．$y = 0$ の場合は補題 3.71 から即座に成り立つ．$y < \mathrm{lh}(t)$ なる y について s が termseq$(s) \wedge \forall i < \mathrm{lh}(s)([s]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x) \wedge \forall i < y([t]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x \to [t]_i \in s)$ となるなら，$[t]_y \subseteq_{\mathrm{p}} x$ でないときは自明に同じ s が $y+1$ での条件を満たし，$[t]_y \subseteq_{\mathrm{p}} x$ のときは $s' = s^\frown[[t]_y]$ が条件を満たす．$[t]_y \subseteq_{\mathrm{p}} x$ の場合非自明なのは termseq(s') である．$[t]_y$ が定数や変数なら自明なので，ある $i, j < y$ で $[t]_y = \ulcorner([t]_i * [t]_j)\urcorner$ となる場合だけ考えればよい．このとき $[t]_i, [t]_j \subseteq_{\mathrm{p}} [t]_y \subseteq_{\mathrm{p}} x$ より $[t]_i, [t]_j \in s$ であるので termseq$(s^\frown[[t]_y])$ が成り立つ．Claim1 の証明終わり．

よって termseq$(s) \wedge \forall i < \mathrm{lh}(s)([s]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x) \wedge \forall i < \mathrm{lh}(t)([t]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x \to [t]_i \in s)$ を満たす s が存在する．$x \in_c t$ だったことから $x \in_c s$ であるので，冒頭の議論から次を示せば証明終了である．

<u>Claim2:</u> s determines-term(x)

s はいま termseq$(s) \wedge \forall i < \mathrm{lh}(s)([s]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x)$ であるので，残り示すべきは s の極大性，すなわち

$$\forall u(u \subseteq_{\mathrm{p}} x \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[u]) \to u \in_c s)$$

である．いま $x \in_c s$ すなわち $\exists i < \mathrm{lh}(s) x = [s]_i$ であるので，以下が lh(s) までのすべての y で成り立つことを帰納法で示せば十分．

$$\forall i < y \forall u(u \subseteq_p [s]_i \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[u]) \to u \in_c s)$$

$y = 0$ なら示すべきことがない．$y = 1$ なら $u = [s]_0$ となる u しか前提を満たさないので明らか．帰納ステップで考えるべきは $u \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[u]) \wedge u \neq [s]_y$ を満たす u のみである．するといま u は項で $[s]_y$ がそれを真に含むことから lh$([s]_y) > 1$ である．したがってこの $[s]_y$ は定数や変数ではないので，ある $i, j < y$ によって $[s]_y = \ulcorner([s]_i * [s]_j)\urcorner$ となる．ここで系 3.67 より $u \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i$ か $u \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_j$ が成り立つが，いずれにせよ $i, j < y$ なので帰納法の仮定から $u \in_c s$ を得る．Claim2 の証明終わり． □

論理式についても同じ議論を繰返す．

定義 3.75. formseq(s) を次の L_1 論理式と定める．

$$\begin{aligned}\forall i < \mathrm{lh}(s)\{&\exists u, v \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i(\mathrm{term}(u) \wedge \mathrm{term}(v) \wedge ([s]_i = \ulcorner(u = v)\urcorner \vee [s]_i = \ulcorner(u < v)\urcorner))\\ &\vee \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner)\\ &\vee \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner)\\ &\vee \exists j < i([s]_i = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner)\\ &\vee \exists j < i \exists k \leq s([s]_i = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k[s]_j)\urcorner \vee [s]_i = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k[s]_j)\urcorner)\}\end{aligned}$$

次に $\mathrm{form}(x)$ を $\exists s\ \mathrm{formseq}(s^\frown[x])$ と定める．

これまで示してきたことから $\mathrm{formseq}(x)$ は $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ であり，よって $\mathrm{form}(x)$ が Σ_1 であることは明らか．

命題 3.76. 次が RCA_0 で証明可能

(1) $\forall s(\mathrm{formseq}(s) \to \forall y \leq \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{formseq}(s \upharpoonright y))$
(2) $\forall s(\mathrm{formseq}(s) \to \forall y < \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{GN}([s]_y))$
(3) $\forall s(\mathrm{formseq}(s) \to \forall y < \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{form}([s]_y))$
(4) $\forall x\{\mathrm{form}(x) \leftrightarrow [\exists t, s(\mathrm{term}(t) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge (x = \ulcorner(r = s)\urcorner \vee x = \ulcorner(r < s)\urcorner))\vee$
$\exists y, z(\mathrm{form}(y) \wedge \mathrm{form}(z) \wedge (x = \ulcorner(y \wedge z)\urcorner \vee x = \ulcorner(y \vee z)\urcorner))\vee$
$\exists y(\mathrm{form}(y) \wedge (x = \ulcorner(\neg y)\urcorner \vee \exists k \leq x(x = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k y)\urcorner \vee x = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k y)\urcorner)))]\}$

補題 3.77. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall u(\mathrm{term}(u) \to \forall y(\neg\mathrm{form}(u^\frown y) \wedge \neg\mathrm{form}(y^\frown u)))$

証明. u の長さに関する帰納法，すなわち以下の論理式の z に関する帰納法で示す．

$$\forall u(\mathrm{term}(u) \wedge \mathrm{lh}(u) \leq z \to \forall y(\neg\mathrm{form}(u^\frown y) \wedge \neg\mathrm{form}(y^\frown u)))$$

$z = 0$ なら前提偽．$\mathrm{term}(u)$ とする．論理式の両端は括弧なので $\mathrm{lh}(u) = 1$ なら自明．よって $u = \ulcorner(a *^f b)\urcorner$（ただし a, b は $\mathrm{term}(a) \wedge \mathrm{term}(b), *^f = +\ or\ \cdot$）とする．もし仮に，$\mathrm{form}(u^\frown y)$ を満たす y が存在したとする．このとき $[u^\frown y]_1$ が $\forall$ や $\exists$ であることはないので，あり得るパターンは 2 通りである．

<u>Case1-1:</u> $u^\frown y = \ulcorner(t_1 *^R t_2)\urcorner$ （ただし t_1, t_2 は $\mathrm{term}(t_1) \wedge \mathrm{term}(t_2), *^R$は $<$ か $=$）

$u^\frown y = \ulcorner(a *^f b)\urcorner{}^\frown y = \ulcorner(t_1 *^R t_2)\urcorner$ より，一番左の括弧を除いて，$\ulcorner a *^f b)\urcorner{}^\frown y = \ulcorner t_1 *^R t_2)\urcorner$ となる．すると $\ulcorner a *^f b)\urcorner$ は $*^R$ を含まないので，ある s が存在して

$$\ulcorner a *^f b)\urcorner{}^\frown(y \upharpoonright s) = t_1$$

が成り立つ．しかし，$\mathrm{term}(a) \wedge \mathrm{term}(t_1)$ なのでこれは項の一意解読性に矛盾する．

<u>Case1-2:</u> $u^\frown y = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$（ただし f_1, f_2 は $\mathrm{form}(f_1) \wedge \mathrm{form}(f_2), *^L$ は $\wedge$ か $\vee$）

$u^\frown y = \ulcorner(a *^f b)\urcorner{}^\frown y = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$ より，一番左の括弧を除いて，$\ulcorner a *^f b)\urcorner{}^\frown y = \ulcorner f_1 *^L f_2)\urcorner$ となる．すると $\ulcorner a *^f b)\urcorner$ は $*^L$ 記号を含まないので，ある s が存在して

$$\ulcorner a *^f b)\urcorner{}^\frown(y \upharpoonright s) = f_1$$

が成り立つ．$\mathrm{lh}(a) < \mathrm{lh}(u)$ より，これは帰納法の仮定に反する．

次に $\mathrm{form}(y^\frown u)$ だったと仮定する．

<u>Case2-1:</u> $y^\frown u = \ulcorner(t_1 *^R t_2)\urcorner$（ただし t_1, t_2 は $\mathrm{term}(t_1) \wedge \mathrm{term}(t_2), *^R$は $<$ か $=$）

$y^\frown u = y^\frown\ulcorner(a *^f b)\urcorner = \ulcorner(t_1 *^R t_2)\urcorner$ より，一番右の括弧を除いて，$\ulcorner y^\frown(a *^f b\urcorner = \ulcorner(t_1 *^R t_2\urcorner$ となる．すると $\ulcorner(a *^f b\urcorner$ は $*^R$ を含まないので，ある $\ulcorner(t_1 *^R\urcorner{}^\frown z = y$ を満たす $z \subseteq_{\mathrm{p}} y$ が存在して

$$z^\frown\ulcorner(a *^f b\urcorner = t_2$$

が成り立つ．しかし，$\mathrm{term}(b) \wedge \mathrm{term}(t_2)$ なのでこれは項の一意解読性に矛盾する．

<u>Case2-2:</u> $y^\frown u = \ulcorner (f_1 *^L f_2) \urcorner$（ただし f_1, f_2 は $\mathrm{form}(f_1) \wedge \mathrm{form}(f_2), *^L$は $\wedge$ か$\vee$）

$y^\frown u = y^\frown \ulcorner (a *^f b) \urcorner = \ulcorner (f_1 *^L f_2) \urcorner$ より，一番右の括弧を除いて，$\ulcorner y^\frown (a *^f b \urcorner = \ulcorner (f_1 *^L f_2 \urcorner$ となる．すると $\ulcorner (a *^f b \urcorner$ は $*^L$ を含まないので，ある $\ulcorner (f_1 *^L \urcorner {}^\frown z = y$ を満たす $z \subseteq_{\mathrm{p}} y$ が存在して

$$z^\frown \ulcorner (a *^f b \urcorner = f_2$$

が成り立つ．$\mathrm{lh}(b) < \mathrm{lh}(u)$ より，これは帰納法の仮定に反する．

<u>Case2-3:</u> $y^\frown u = \ulcorner (\neg f_1) \urcorner$（ただし f_1 は $\mathrm{form}(f_1)$）

$y^\frown u = y^\frown \ulcorner (a *^f b) \urcorner = \ulcorner (\neg f_1) \urcorner$ より，一番右の括弧を除いて，$\ulcorner y^\frown (a *^f b \urcorner = \ulcorner (\neg f_1 \urcorner$ となる．すると $\ulcorner (a *^f b \urcorner$ は $\ulcorner \neg \urcorner$ を含まないので，$\ulcorner (\neg \urcorner {}^\frown z = y$ を満たすある $z \subseteq_{\mathrm{p}} y$ が存在して

$$z^\frown \ulcorner (a *^f b \urcorner = f_1$$

が成り立つ．$\mathrm{lh}(b) < \mathrm{lh}(u)$ より，これは帰納法の仮定に反する．

<u>Case2-4:</u> $y^\frown u = \ulcorner (Q\mathsf{v}_k f_1) \urcorner$（ただし f_1 は $\mathrm{form}(f_1), Q = \forall\ \mathit{or}\ \exists$）

$y^\frown u = y^\frown \ulcorner (a *^f b) \urcorner = \ulcorner (Q\mathsf{v}_k f_1) \urcorner$ より，一番右の括弧を除いて，$\ulcorner y^\frown (a *^f b \urcorner = \ulcorner (Q\mathsf{v}_k f_1 \urcorner$ となる．すると $\ulcorner (a *^f b \urcorner$ は $\ulcorner Q\mathsf{v}_k \urcorner$ を含まないので，$\ulcorner (Q\mathsf{v}_k \urcorner {}^\frown z = y$ を満たすある $z \subseteq_{\mathrm{p}} y$ が存在して

$$z^\frown \ulcorner (a *^f b \urcorner = f_1$$

が成り立つ．$\mathrm{lh}(b) < \mathrm{lh}(u)$ より，これは帰納法の仮定に反する．　□

補題 3.78. (論理式の一意解読性) $*^L, *^{L'}$ は $\wedge$ か $\vee$ とする．次が RCA_0 で証明可能

$$(a)\ \begin{cases} \forall x, y(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(x^\frown y) \to \mathrm{lh}(y) = 0) \\ \forall x, y(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(y^\frown x) \to \mathrm{lh}(y) = 0) \end{cases}$$

(b) $\forall x, r, s(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(r) \wedge \mathrm{form}(s) \wedge x \subseteq_{\mathrm{p}} \ulcorner (r *^L s) \urcorner \to x \subseteq_{\mathrm{p}} r \vee x \subseteq_{\mathrm{p}} s \vee x = \ulcorner (r *^L s) \urcorner)$

(c) $\forall x, y, r, s(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(y) \wedge \mathrm{form}(r) \wedge \mathrm{form}(s) \wedge \ulcorner (x *^L y) \urcorner = \ulcorner (r *^{L'} s) \urcorner$
$\to x = r \wedge y = s \wedge *^L = *^{L'})$

証明. (a) $x^\frown y$ の長さに関する帰納法，形式的には以下の論理式における z に関する帰納法でそれぞれ示せばよい．

$$\forall x, y(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(x^\frown y) \wedge \mathrm{lh}(x^\frown y) \leq z \to \mathrm{lh}(y) = 0)$$

$$\forall x, y(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(y^\frown x) \wedge \mathrm{lh}(y^\frown x) \leq z \to \mathrm{lh}(y) = 0)$$

(a) の下段は上段と同じ議論を行うだけなので上段だけ示す．

<u>Case(a)-1:</u> $x = \ulcorner (u *^R v) \urcorner$（ただし u, v は $\mathrm{term}(u) \wedge \mathrm{term}(v), *^R$は $<$ か $=$ ）のとき

$[x]_1 = [x^\frown y]_1$ は $\forall, \exists$ でないので以下の二通りが候補として残る．

<u>Case(a)-1-(i):</u> $x^\frown y = \ulcorner (u' *^{R'} v') \urcorner$（ただし u', v'は $\mathrm{term}(u') \wedge \mathrm{term}(v'), *^{R'}$は $<$ か $=$ ）のとき

x と $x^\frown y$ に含まれている関係記号はそれぞれ唯一であることと，項に関する一意解読性より $\mathrm{lh}(y)=0$ が従う．

Case(a)-1-(ii): $x^\frown y = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$（ただし f_1, f_2 は $\mathrm{form}(f_1) \wedge \mathrm{term}(f_2), *^L$ は $\wedge$ か $\vee$）のとき矛盾を導く．$x^\frown y = \ulcorner(u *^R v)\urcorner^\frown y = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$ より，左括弧を取り除いて $\ulcorner u *^R v)\urcorner^\frown y = \ulcorner f_1 *^L f_2)\urcorner$ が成り立つ．$u *^R v)$ に $*^L$ は含まれないので，ある s が存在して

$$u *^R v)^\frown(y \upharpoonright s) = f_1$$

となるが，$\mathrm{term}(u)$ なのでこれは補題 3.77 に反する．

以下の場合は全て帰納法の仮定を直接的に使い項のときと同様の議論を行えばよい．

Case(a)-2: $x = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$（ただし f_1, f_2は $\mathrm{form}(f_1) \wedge \mathrm{form}(f_2), *^L$は $\wedge$ か $\vee$ ）のとき

Case(a)-3: $x = \ulcorner(\neg f_1)\urcorner$（ただし f_1は $\mathrm{form}(f_1), *^L$は $\wedge$ か $\vee$ ）のとき

Case(a)-4: $x = \ulcorner(Q\mathsf{v}_k f_1)\urcorner$（ただし f_1は $\mathrm{form}(f_1), Q$ は $\forall$ か $\exists$）のとき

(b) 項の一意解読性 (c) と同様に

$$\begin{aligned}\forall x \forall r, s, u, w(&\mathrm{form}(r) \wedge \mathrm{form}(s) \wedge \mathrm{form}(x) \wedge u^\frown x^\frown w = \ulcorner(r *^L s)\urcorner \\ &\to \mathrm{lh}(w) \geq \mathrm{lh}(s)+2 \vee \mathrm{lh}(u) \geq \mathrm{lh}(r)+2 \vee \mathrm{lh}(u)=\mathrm{lh}(w)=0))\end{aligned}$$

を x の長さによる帰納法で示せば良い．

(c) (a) から明らか． □

定義 3.79. s determines-form(x) を次の $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式とする．

$$\forall i < \mathrm{lh}(s)([s]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x) \wedge \mathrm{formseq}(s) \wedge \forall y(y \subseteq_{\mathrm{p}} x \wedge \mathrm{formseq}(s^\frown[y]) \to y \in_c s)$$

また項のときと同様以下は明らか．

$$\forall x, \forall s(s \text{ determines-form}(x) \leftrightarrow s \text{ determines-form}(x \upharpoonright \mathrm{lh}(x)))$$

補題 3.80. 次が RCA_0 で証明可能

(a) $\forall x \exists s(s \text{ determines-form}(x))$

(b) $\forall x, s, t(s \text{ determines-form}(x) \wedge t \text{ determines-form}(x) \to \forall i < \mathrm{lh}(s)[s]_i \in_c t)$

証明. (a) 項の場合と細部は同じである．$\varphi(x,y)$ を $\exists s(s \text{ determines-form}(x \upharpoonright y))$ とおいて

$$\forall x[\varphi(x,0) \wedge \forall y < \mathrm{lh}(x)(\varphi(x,y) \to \varphi(x,y+1))]$$

を示せば十分．x を固定する．$\varphi(x,0)$ は s として $[]$ を考えれば良い．$y < \mathrm{lh}(x)$ について $\varphi(x,y)$ を仮定する．するとある s によって

$$s \text{ determines-form}(x \upharpoonright y)$$

となる．論理式の場合は $x \upharpoonright (y+1) = (x \upharpoonright y)^\frown[[x]_y]$ における $[[x]_y]$ に応じて次のように場合分けして考えればよい．

Case1: $[[x]_y] \neq \ulcorner)\urcorner$ のとき．

同じ s でよい．

Case2: $[[x]_y] = \ulcorner)\urcorner$ のとき．

Case2-(i): $x \upharpoonright y$ がある r と $i, j < \mathrm{lh}(s)$ によって $\ulcorner r([s]_i *^L [s]_j \urcorner$ と書けるとき（ここで $*^L$ は $\wedge$ か $\vee$）．

$s' := s^\frown[\ulcorner([s]_i *^L [s]_j)\urcorner]$ が条件を満たす．

Case2-(ii): $x \upharpoonright y$ がある r と $i < \mathrm{lh}(s)$ によって $\ulcorner r(\neg[s]_i \urcorner$ と書けるとき．

$s' := s^\frown[\ulcorner(\neg[s]_i)\urcorner]$ が条件を満たす．

あと 2 パターンあるが，全く同様なので省略する．

(b) 項の場合と同じである． □

系 3.81. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, s, t(s \text{ determines-form}(x) \wedge t \text{ determines-form}(x) \to \forall y(y \in_c s \leftrightarrow y \in_c t))$

命題 3.82.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x(\mathrm{form}(x) \leftrightarrow \forall s((s \text{ determines-form}(x)) \to x \in_c s))$$

したがって $\mathrm{form}(x)$ は $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ である．

証明. 方針も詳細も項の場合と同様である． □

定義 3.83. $\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)$ を次の $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式と定める．

$$\begin{aligned}
&\forall i < \mathrm{lh}(s)\{\exists u, v \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i(\mathrm{term}(u) \wedge \mathrm{term}(v) \wedge ([s]_i = \ulcorner(u = v)\urcorner \vee [s]_i = \ulcorner(u < v)\urcorner))\\
&\quad \vee \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner)\\
&\quad \vee \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner)\\
&\quad \vee \exists j < i([s]_i = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner)\\
&\quad \vee \exists j < i \exists k \leq s, \exists u \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i(\mathrm{term}(u) \wedge \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \wedge [s]_i = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge [s]_j))\urcorner)\\
&\quad \vee \exists j < i \exists k \leq s, \exists u \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i(\mathrm{term}(u) \wedge \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \wedge [s]_i = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k < u)) \vee [s]_j))\urcorner)\}
\end{aligned}$$

次に $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ を $\exists s\ \mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s^\frown[x])$ と定める．

命題 3.84. 次が RCA_0 で証明可能

(1) $\forall s(\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s) \to \forall y \leq \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright y))$

(2) $\forall s(\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s) \to \forall y < \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{GN}([s]_y))$

(3) $\forall s(\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s) \to \forall y < \mathrm{lh}(s)\ \mathrm{form}_{\Delta_0}([s]_y))$

(4) $$\begin{aligned}\forall x\{\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \leftrightarrow {}& [\exists t, s(\mathrm{term}(t) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge (x = \ulcorner(r = s)\urcorner \vee x = \ulcorner(r < s)\urcorner))\vee\\
& \exists y, z(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(z) \wedge (x = \ulcorner(y \wedge z)\urcorner \vee x = \ulcorner(y \vee z)\urcorner))\vee\\
& \exists y(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y))\vee\\
& \exists y, u(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y) \wedge \mathrm{term}(u)\wedge\ (\exists k \leq x(\ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u\wedge\\
& \quad (x = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge y))\urcorner \vee x = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k < u)) \vee y))\urcorner)))))]\}\end{aligned}$$

命題 3.85. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x(\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \to \mathrm{form}(x))$

証明． x の長さによる帰納法で示せばよい． $\square$

特にここから $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ についても一意解読性が成り立つことが分かる．よって $\mathrm{form}(x)$ のアナロジーで s determines-$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ を定めれば

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x(\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \leftrightarrow \forall s((s \text{ determines-form}_{\Delta_0}(x)) \to \exists i < \mathrm{lh}(s)([s]_i = x)))$$

が成り立つことも $\mathrm{form}(x)$ のときと全く同様にして確認できるので $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ は $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ である．

3.5.3 $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$ の定義と性質の証明

"ゲーデル数 x が指す Δ_0 論理式にパラメータの集合として y を与えたときに充足される" を意味する関係 $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$ を構成する．証明は徐々に煩雑になるが，アイデアは前節と変わらずその帰納的構成に着目することにある．

定義 3.86. $\mathrm{valseq}(y, s, t)$ を次の論理式と定める．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{termseq}(s) \wedge \mathrm{lh}(t) = \mathrm{lh}(s) \wedge \\
&\qquad \forall i < \mathrm{lh}(s)\{([s]_i = \ulcorner 0 \urcorner \wedge [t]_i = 0) \vee \\
&\qquad\qquad ([s]_i = \ulcorner 1 \urcorner \wedge [t]_i = 1) \vee \\
&\qquad\qquad \exists j \leq s([s]_i = \ulcorner \mathsf{v}_j \urcorner \wedge [t]_i = [y]_j) \vee \\
&\qquad\qquad \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner ([s]_j + [s]_k) \urcorner \wedge [t]_i = [t]_j + [t]_k) \vee \\
&\qquad\qquad \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner ([s]_j \cdot [s]_k) \urcorner \wedge [t]_i = [t]_j \cdot [t]_k)\}
\end{aligned}$$

$\mathrm{val}(x, y) = z$ を次の論理式と定める．

$$\exists s, t(\mathrm{valseq}(y, s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = x \wedge \mathrm{last}(t) = z) \vee (\neg \mathrm{term}(x) \wedge z = 0)$$

命題 3.87. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y \exists! z(\mathrm{val}(x, y) = z)$.

証明． $\mathrm{val}(x, y) = z$ が $\Sigma_1(\mathrm{RCA}_0)$ であることに注意せよ．

まず $\neg\mathrm{term}(x)$ の場合は明らかに任意の y, z について $\mathrm{val}(x, y) = z \leftrightarrow z = 0$ であるので考えなくて良い．

<u>Claim1:</u> $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y \exists z\ \mathrm{val}(x, y) = z$

y と $\mathrm{term}(x)$ なる x を任意にとって固定する．いま $\mathrm{term}(x)$ であるから $\mathrm{termseq}(s) \wedge \mathrm{last}(s) = x$ なる s は取れるので，

$$\forall w \leq \mathrm{lh}(s) \exists t[\mathrm{lh}(t) = w \wedge \mathrm{valseq}(y, s \upharpoonright w, t)]$$

を w の $\mathrm{lh}(s)$ までの帰納法で示せばよい．$w = 0$ なら $t = []$ でよい．$w < \mathrm{lh}(s)$ について t が $\mathrm{lh}(t) = w \wedge \mathrm{valseq}(y, s \upharpoonright w, t)$ を満たすとする．このとき $[s]_w$ に応じて以下で定める t' が条件を

満たす．

$$
\begin{aligned}
&[s]_w = \ulcorner 0 \urcorner \text{ の場合は } t' = t^\frown[0]\\
&[s]_w = \ulcorner 1 \urcorner \text{ の場合は } t' = t^\frown[1]\\
&[s]_w = \ulcorner \mathsf{v}_j \urcorner \text{ の場合は } t' = t^\frown[[y]_j]\\
&[s]_w = \ulcorner ([s]_i + [s]_j) \urcorner (i, j < w) \text{ の場合は } t' = t^\frown[[t]_i + [t]_j]\\
&[s]_w = \ulcorner ([s]_i \cdot [s]_j) \urcorner (i, j < w) \text{ の場合は } t' = t^\frown[[t]_i \cdot [t]_j]
\end{aligned}
$$

Claim2: $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y, z, z'(\mathrm{val}(x, y) = z \land \mathrm{val}(x, y) = z' \to z = z')$

y と $\mathrm{term}(x)$ なる x を任意にとって固定する．以下を示せば十分．

$$\forall s, s', t, t'(\mathrm{valseq}(y, s, t) \land \mathrm{valseq}(y, s', t') \land \mathrm{last}(s) = x = \mathrm{last}(s') \to \mathrm{last}(t) = \mathrm{last}(t'))$$

s, s', t, t' を $\mathrm{valseq}(y, s, t) \land \mathrm{valseq}(y, s', t') \land \mathrm{last}(s) = x = \mathrm{last}(s')$ を満たすよう任意にとる．次を w の $\mathrm{lh}(t)$ までの帰納法で示せば良い．

$$\forall w \leq \mathrm{lh}(t) \forall i < w \forall j < \mathrm{lh}(t')([s]_i = [s']_j \to [t]_i = [t']_j)$$

$w = 0$ なら示すべきことがない．$w < \mathrm{lh}(t)$ について $[s]_w = [s']_j$ なる $j < \mathrm{lh}(t')$ を j を固定しておく（そのような j がなければ自明）．いま $\mathrm{termseq}(s) \land \mathrm{termseq}(s')$ だから，$[s]_w = [s']_j$ について以下の場合が考えられる．

Case1: $[s]_w = \ulcorner 0 \urcorner = [s']_j$ または $[s]_w = \ulcorner 1 \urcorner = [s']_j$ のとき．

$[s]_w = \ulcorner 0 \urcorner = [s']_j$ なら $[t]_w = 0 = [t]_j$．他方も同様．

Case2: $[s]_w = \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner = \ulcorner \mathsf{v}_{k'} \urcorner = [s']_j$ のとき．ただし $k \leq s$ かつ $k' \leq s$ である．

明らかに $k = k'$ なので $[t]_w = [y]_k = [y]_{k'} = [t']_j$

Case3: $[s]_w = \ulcorner ([s]_l * [s]_m) \urcorner = \ulcorner ([s']_{l'} *' [s']_{m'}) \urcorner = [s']_j$ のとき．ただし $l, m < w$ かつ $l', m' < j$ で $*$ と $*'$ はそれぞれ $+$ か $\cdot$ である．

項の一意解読性より $[s]_l = [s']_{l'} \land [s]_m = [s']_{m'}$ で $*$ は $*'$ と等しいことが分かるので，帰納法の仮定より $[t]_l = [t']_{l'} \land [t]_m = [t']_{m'}$ が成り立つ．したがって

$$[t]_w = [t]_l * [t]_m = [t']_{l'} *' [t']_{m'} = [t]_j$$

□

命題 3.88. RCA_0 で次が証明可能．

(1) $\forall y(\mathrm{val}(\ulcorner 0 \urcorner, y) = 0 \land \mathrm{val}(\ulcorner 1 \urcorner, y) = 1)$

(2) $\forall y, i(\mathrm{val}(\ulcorner \mathsf{v}_i \urcorner, y) = [y]_i)$

(3) $\forall x, y, z(\mathrm{term}(x) \land \mathrm{term}(y) \to \mathrm{val}(\ulcorner (x + y) \urcorner, z) = \mathrm{val}(x, z) + \mathrm{val}(y, z))$

(4) $\forall x, y, z(\mathrm{term}(x) \land \mathrm{term}(y) \to \mathrm{val}(\ulcorner (x \cdot y) \urcorner, z) = \mathrm{val}(x, z) \cdot \mathrm{val}(y, z))$

(5) $\forall k, y, x, u(\mathrm{term}(u) \land \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \to \mathrm{val}(u, y[x/k]) = \mathrm{val}(u, y))$

証明． (1), (2) は明らか．(3) を示す．$\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(y)$ なる x, y を任意に取る．$\mathrm{val}(x, z) = a, \mathrm{val}(y, z) = b$ とおけば，定義から s, t で $\mathrm{valseq}(z, s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = x \wedge \mathrm{last}(t) = a$，$s', t'$ で $\mathrm{valseq}(z, s', t') \wedge \mathrm{last}(s') = y \wedge \mathrm{last}(t') = b$ を満たすものが存在する．ここで

$$s'' := s^\frown s'^\frown[\ulcorner(x+y)\urcorner], \quad t'' := t^\frown t'^\frown[a+b]$$

とおけば $\mathrm{valseq}(z, s'', t'') \wedge \mathrm{last}(s'') = \ulcorner(x+y)\urcorner \wedge \mathrm{last}(t'') = a + b$ となるので一意性から $\mathrm{val}(\ulcorner(x+y)\urcorner, z) = a + b$ である．(4) も同様.

(5) を示す．k, y, x を任意にとって固定しておき，u の長さに関する帰納法で示す[*29]．$\mathrm{term}(u) \wedge \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \wedge \mathrm{lh}(u)$ を満たす u としてあり得るのは $\ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \ulcorner \mathsf{v}_i \urcorner, \ulcorner(a * b)\urcorner$ のいずれかである．ただしここで $i \neq k, \mathrm{term}(a), \mathrm{term}(b)$, で $*$ は $+$ か $\cdot$ である．非自明なのは $u = \ulcorner(a * b)\urcorner$ の場合である．いま $\mathrm{lh}(a), \mathrm{lh}(b) < \mathrm{lh}(u)$ かつ $\ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c a, b$ なので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(u, y[x/k]) &= \mathrm{val}(\ulcorner(a*b)\urcorner, y[x/k]) \\
&= \mathrm{val}(a, y[x/k]) * \mathrm{val}(b, y[x/k]) \\
&= \mathrm{val}(a, y) * \mathrm{val}(b, y) && (\because a, b \text{ に帰納法の仮定を適用}) \\
&= \mathrm{val}(\ulcorner(a*b)\urcorner, y) = \mathrm{val}(u, y)
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

系 3.89. 任意の数項 $t(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)$（項に含まれる自由変数は $\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k$ のみ）に対して，$n = \ulcorner t(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)\urcorner (\in \omega)$ と置けば，次が成り立つ.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall a_0, ..., a_k, b \forall z (z = t(a_0, ..., a_k) \leftrightarrow z = \mathrm{val}(n, [a_0, ..., a_k]^\frown b))$$

証明． L_1 項の構成に関する帰納法で示す．いま

メタにおいて $\mathrm{term}(n)$ が成り立ち，論理式 $\mathrm{term}(x)$ は Σ_1 なので PA^- の Σ_1 完全性より $\mathrm{RCA}_0 \vdash \mathrm{term}(n)$ となる．$t(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)$ が定数や変数なら自明なのでそうでないとすると，

$$t(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k) = (t_L(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k) * t_R(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k))$$

となる別の項 t_L, t_R が存在する．ただし $*$ は $+$ か $\cdot$ である．すると $n_L, n_R \in \omega$ で以下がメタで正しい．

$$n_L = \ulcorner t_L(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)\urcorner \wedge n_R = \ulcorner t_R(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)\urcorner \wedge n = \ulcorner(n_L * n_R)\urcorner$$

ここで再び PA^- の Σ_1 完全性より

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \mathrm{term}(n_L) \wedge \mathrm{term}(n_R) \wedge n = \ulcorner(n_L * n_R)\urcorner$$

[*29] 形式的には

$$\forall z \forall u(\mathrm{term}(u) \wedge \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \wedge \mathrm{lh}(u) \leq z \to \mathrm{val}(u, y[x/k]) = \mathrm{val}(u, y))$$

を z に関する帰納法.

が成り立つ．$a_0, ..., a_k, b, z$ を任意にとれば，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{RCA}_0 \vdash) z &= t(a_0, ..., a_k) \\
&= (t_L(a_0, ..., a_k) * t_R(a_0, ..., a_k)) \\
&= \mathrm{val}(t_L(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_k), [a_0, ..., a_k]^\frown b) * \mathrm{val}(t_R(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_k), [a_0, ..., a_k]^\frown b) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= \mathrm{val}(n_L, [a_0, ..., a_k]^\frown b) * \mathrm{val}(n_R, [a_0, ..., a_k]^\frown b) \\
&= \mathrm{val}(\ulcorner (n_L * n_R) \urcorner, [a_0, ..., a_k]^\frown b) \\
&= \mathrm{val}(n, [a_0, ..., a_k]^\frown b)
\end{aligned}
$$

□

定義 3.90. $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t)$ を次の $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ 論理式とする．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s) \wedge \\
&\forall l < \mathrm{lh}(t) \exists i, y, w \leq t[[t]_l = \langle i, y, w \rangle \wedge i < \mathrm{lh}(s) \wedge w \leq 1 \wedge \\
&\{\ \exists u, u' \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i (\mathrm{term}(u) \wedge \mathrm{term}(u') \wedge [s]_i = \ulcorner (u = u') \urcorner \wedge (w = 1 \leftrightarrow \mathrm{val}(u, y) = \mathrm{val}(u', y))) \\
&\vee \exists u, u' \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i (\mathrm{term}(u) \wedge \mathrm{term}(u') \wedge [s]_i = \ulcorner (u < u') \urcorner \wedge (w = 1 \leftrightarrow \mathrm{val}(u, y) < \mathrm{val}(u', y))) \\
&\vee \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner ([s]_j \wedge [s]_k) \urcorner \wedge \\
&\quad \exists l_1, l_2 < l \exists w_1, w_2 \leq 1([t]_{l_1} = \langle j, y, w_1 \rangle \wedge [t]_{l_2} = \langle k, y, w_2 \rangle \wedge (w = 1 \leftrightarrow w_1 = 1 \wedge w_2 = 1))) \\
&\vee \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner ([s]_j \vee [s]_k) \urcorner \wedge \\
&\quad \exists l_1, l_2 < l \exists w_1, w_2 \leq 1([t]_{l_1} = \langle j, y, w_1 \rangle \wedge [t]_{l_2} = \langle k, y, w_2 \rangle \wedge (w = 1 \leftrightarrow w_1 = 1 \vee w_2 = 1))) \\
&\vee \exists j < i([s]_i = \ulcorner (\neg [s]_j) \urcorner \wedge \exists l_1 < l \exists w_1 \leq 1([t]_{l_1} = \langle j, y, w_1 \rangle \wedge (w = 1 \leftrightarrow w_1 = 0))) \\
&\vee \exists j < i \exists k \leq s \exists u \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i (\mathrm{term}(u) \wedge [s]_i = \ulcorner (\exists \mathsf{v}_k ((\mathsf{v}_k < u) \wedge [s]_j)) \urcorner \\
&\qquad\qquad \wedge \forall r < \mathrm{val}(u, y) \exists l_1 < l \exists w_1 \leq 1([t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], w_1 \rangle) \\
&\qquad\qquad \wedge (w = 1 \leftrightarrow \exists r < \mathrm{val}(u, y) \exists l_1 < l([t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], 1 \rangle))) \\
&\vee \exists j < i \exists k \leq s \exists u \subseteq_{\mathrm{p}} [s]_i (\mathrm{term}(u) \wedge [s]_i = \ulcorner (\forall \mathsf{v}_k ((\neg (\mathsf{v}_k < u)) \vee [s]_j)) \urcorner \\
&\qquad\qquad \wedge \forall r < \mathrm{val}(u, y) \exists l_1 < l \exists w_1 \leq 1([t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], w_1 \rangle) \\
&\qquad\qquad \wedge (w = 1 \leftrightarrow \forall r < \mathrm{val}(u, y) \exists l_1 < l([t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], 1 \rangle)))\}]
\end{aligned}
$$

次に $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$ は以下の論理式とする．

$$\exists s, t[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = x \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t)([t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, y, 1 \rangle)]$$

例 3.91.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (\forall \mathsf{v}_0 (\neg (\mathsf{v}_0 < (1{+}(1{+}1)))) \vee (((\mathsf{v}_0 \cdot \mathsf{v}_0) < (\mathsf{v}_0 {+} \mathsf{v}_0)) \vee ((\mathsf{v}_0 \cdot \mathsf{v}_0) = (\mathsf{v}_0 {+} \mathsf{v}_0))))) \urcorner, [])$$

$\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$ の第一引数には $\forall n < 3(n^2 \leq 2n)$ を正確な形で書いた論理式のゲーデル数，第二引数には空を入れている（第二引数は自由変数への割り当てなので今回は必要ない）．実際，x を上記の Sat_{Δ_0} への第一引数とすると，

$$s = [\ulcorner ((\mathsf{v}_0 \cdot \mathsf{v}_0) < (\mathsf{v}_0 + \mathsf{v}_0)) \urcorner, \ulcorner ((\mathsf{v}_0 \cdot \mathsf{v}_0) = (\mathsf{v}_0 + \mathsf{v}_0)) \urcorner,$$

$$\ulcorner(((\mathsf{v}_0 \cdot \mathsf{v}_0) < (\mathsf{v}_0 + \mathsf{v}_0)) \vee ((\mathsf{v}_0 \cdot \mathsf{v}_0) = (\mathsf{v}_0 + \mathsf{v}_0)))\urcorner, x]$$

$$t = [\langle 0, [0], 0\rangle, \langle 0, [1], 1\rangle, \langle 0, [2], 0\rangle, \langle 1, [0], 0\rangle, \langle 1, [1], 1\rangle, \langle 1, [2], 1\rangle,$$
$$\langle 2, [0], 1\rangle, \langle 2, [1], 1\rangle, \langle 2, [2], 1\rangle, \langle 3, [], 1\rangle]$$

と定めれば，$\mathrm{lh}(s) = 4, \mathrm{lh}(t) = 10$ であり，

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge [t]_9 = \langle 3, [], 1\rangle$$

が成り立つ．

定義 3.92. 4 変数論理式 s, t determines $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, y)$ を以下とする．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t) \exists i < \mathrm{lh}(s) \exists w \leq 1([s]_i = x \wedge [t]_l = \langle i, y, w\rangle)$$

補題 3.93.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, a(\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \to \exists s, t(s, t \text{ determines } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, a)))$$

証明. x は $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ を満たすとし，a は任意にとって固定しておく．そして

$$\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s) \wedge [s]_{\mathrm{lh}(s)-1} = x \wedge \forall i < \mathrm{lh}(s)([s]_i \subseteq_{\mathrm{p}} x)$$

なる s をとっておく．次の関数 $B(m, a)$[*30]が RCA_0 で定義できる．

$$\begin{cases} B(0, a) & = a + 1 \\ B(m+1, a) & = B(m, a) + 1 + \max_{y < B(m,a)} \max_{k < x, u \subseteq_{\mathrm{p}} x, \mathrm{term}(u)} \max_{p < \mathrm{val}(u, y)} y[p/k] \end{cases}$$

$\psi(i)$（s, a がパラメータに含まれている）を以下とする．

$$\forall m \leq i \forall y < B(i - m, a) \exists t[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (m+1), t) \wedge \mathrm{lh}(t) > 0$$
$$\wedge \exists l < \mathrm{lh}(t) \exists w \leq 1([t]_l = \langle m, y, w\rangle)]$$

もし $\psi(\mathrm{lh}(s) - 1)$ が証明できれば m を $\mathrm{lh}(s) - 1$，y を a とした上式の $[\cdots]$ の中身を満たす t が取れて $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{lh}(t) > 0 \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t) \exists w \leq 1([t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, a, w\rangle)$ すなわち $s, t(s, t \text{ determines } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, a))$ となる．したがって以下を示せば補題が証明できたことになる．

$$\psi(0) \wedge \forall i < \mathrm{lh}(s)(\psi(i-1) \to \psi(i)) \tag{3.22}$$

Base Step:$\psi(0)$ を示す．

示すべきは $\forall y < B(0, a) \exists t[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright 1, t) \wedge \mathrm{lh}(t) > 0 \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t) \exists w \leq 1([t]_l = \langle 0, y, w\rangle)]$ である．$s \upharpoonright 1 = [[s]_0]$ に注意せよ．$y < B(0, a)$ とする．

CaseB-1: $[s]_0 = \ulcorner(u = u')\urcorner$ のとき．ただし $\mathrm{term}(u), \mathrm{term}(u')$

[*30] 厳密にパラメータを表示するなら $B(m, a, x)$ なのだが，表記が煩雑になるため以降では省略する．また以降で使う性質は m に関する単調姓と $y < B(m, a) \to y[p/k] < B(m+1, a)$ (ただし p, k は特定の条件を満たす) のみである．

$\mathrm{val}(u,y) = \mathrm{val}(u',y)$ なら $t = [\langle 0,y,1\rangle]$ が，$\mathrm{val}(u,y) \neq \mathrm{val}(u',y)$ なら $t = [\langle 0,y,0\rangle]$ が $\mathrm{satseq}(s \upharpoonright 1, t)$ を満たす．

<u>CaseB-2:</u> $[s]_0 = \ulcorner(u < u')\urcorner$ のとき．ただし $\mathrm{term}(u), \mathrm{term}(u')$

y' を任意に取る．$\mathrm{val}(u,y) < \mathrm{val}(u',y)$ なら $t = [\langle 0,y,1\rangle]$ が，$\mathrm{val}(u,y) \geq \mathrm{val}(u',y)$ なら $t = [\langle 0,y,0\rangle]$ が $\mathrm{satseq}(s \upharpoonright 1, t)$ を満たす．

<u>Induction Step:</u> $i < \mathrm{lh}(s)$ について $\psi(i-1)$ を仮定し $\psi(i)$ を示す．

まず表記の簡便さのために $\rho(i,m)$ を $\psi(i) \equiv \forall m \leq i \rho(i,m)$ なる論理式とする．

このとき帰納法の仮定は $\forall m \leq i-1 \rho(i-1,m) \cdots (\bigstar)$ で示すべきは $\forall m \leq i\rho(i,m)$ であり，これは次を示せば十分．

$$\rho(i,0) \wedge \forall m < i[(\forall m' \leq m\rho(i,m')) \to \rho(i,m+1)]$$

$\rho(i,0)$ は Base と同じ議論で成立する．$m < i$ なる m を任意にとって固定し，$\forall m' \leq m\rho(i,m') \cdots (\clubsuit)$ を仮定する．これから示していく $\rho(i,m+1)$ とは次の主張である．

$$\begin{aligned}\forall y < B(i-(m+1),a)\exists t[&\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (m+2), t) \wedge \mathrm{lh}(t) > 0 \\ &\wedge \exists l < \mathrm{lh}(t)\exists w \leq 1([t]_l = \langle m+1, y, w\rangle)]\end{aligned}$$

$y < B(i-(m+1),a)$ を任意にとって固定する．

<u>CaseI-1:</u> $[s]_{m+1} = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge [s]_j))\urcorner$ のとき．ただし $j < m+1(\leq i), k \leq s, \mathrm{term}(u)$.

まず次を帰納法で示す．

Claim 1.

$$\begin{aligned}\forall p \leq \mathrm{val}(u,y)\exists t[&\mathrm{satseq}(s \upharpoonright (j+1), t) \wedge \mathrm{lh}(t) > 0 \\ &\wedge \forall r < p\exists l < \mathrm{lh}(t)\exists w \leq 1([t]_l = \langle j, y[r/k], w\rangle)]\end{aligned} \tag{3.23}$$

Claim の証明．$p = 0$ は明らか．実際，いま $j \leq i-1$ なので帰納法の仮定 $(\bigstar)$ から従う．次に $p < \mathrm{val}(u,y')$ なる p について以下を満たす t_p が存在したとする．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j+1), t_p) \wedge \mathrm{lh}(t_p) > 0 \wedge \forall r < p\exists l < \mathrm{lh}(t_p)\exists w \leq 1([t_p]_l = \langle j, y'[r/k], w\rangle)$$

いま $y < B(i-m-1,a)$ かつ $j \leq m$ ゆえ，$y[p/k] < B(i-m,a) \leq B(i-j,a)$ である．したがって帰納法の仮定 $(\clubsuit)$ の，とくに $\rho(i,j)$[*31]によって，次を満たす t' が取れる．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j+1), t') \wedge \mathrm{lh}(t) > 0 \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t')\exists w \leq 1([t']_l = \langle j, y[p/k], w\rangle)$$

このとき

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j+1), t_p^\frown t') \wedge \mathrm{lh}(t_p^\frown t') > 0 \wedge \forall r < p+1\exists l < \mathrm{lh}(t'')\exists w \leq 1([t_p^\frown t']_l = \langle j, y[r/k], w\rangle)$$

---

*31

$$\begin{aligned}\forall y < B(i-j,a)\exists t[&\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j+1), t) \wedge \mathrm{lh}(t) > 0 \\ &\wedge \exists l < \mathrm{lh}(t)\exists w \leq 1([t]_l = \langle j, y, w\rangle)]\end{aligned}$$

が成り立つ．以上で式 3.23 が成り立つことが確認できた． Claim の証明終わり．

以上の Claim1 より次を満たす t_0 が存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s\restriction(j+1),t_0)\wedge \mathrm{lh}(t_0)>0\wedge \forall r<\mathrm{val}(u,y)\exists l<\mathrm{lh}(t_0)\exists w\leq 1([t_0]_l=\langle j,y[r/k],w\rangle)$$

ここで $w:=\begin{cases}1 & \text{if } \exists r<\mathrm{val}(u,y)\exists l<\mathrm{lh}(t_0)([t_0]_l=\langle j,y[r/k],1\rangle)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ と定めれば，以上の y,t_0,w について $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s\restriction(m+2),t_0^\frown[\langle m+1,y,w\rangle])$ が成り立つ．

<u>CaseI-2:</u> $[s]_{m+1}=\ulcorner(\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k<u))\vee[s]_j))\urcorner$ のとき．ただし $j<m+1,k\leq s,\mathrm{term}(u)$.

CaseI-1 の証明最後の w の定義中の $\exists r<\cdots$ を $\forall r<\cdots$ に変えればそれが証明になる．

<u>CaseI-3:</u> $[s]_{m+1}=\ulcorner(u*^R u')\urcorner$ のとき．ただし $\mathrm{term}(u),\mathrm{term}(u')$ で $*^R$ は $=$ か $<$.

CaseB-1,2 と同様である．

<u>CaseI-4:</u> $[s]_{m+1}=\ulcorner([s]_j *^L [s]_k)\urcorner$ のとき．ただし $j,k<m+1$ で $*^L$ は $\wedge$ か $\vee$.

いま $j,k\leq m$ であることから $y<B(i-(m+1),a)\leq\min(B(i-j,a),B(i-k,a))$ なので，帰納法の仮定 (♣) から t_j,l_j,w_j と t_k,l_k,w_k で以下を満たすものが存在する．

$$\mathrm{satseq}(s\restriction(j+1),t_j)\wedge\mathrm{lh}(t_j)>0\wedge l_j<\mathrm{lh}(t_j)\wedge[t]_l=\langle j,y,w_j\rangle$$

$$\mathrm{satseq}(s\restriction(k+1),t_k)\wedge\mathrm{lh}(t_k)>0\wedge l_k<\mathrm{lh}(t_k)\wedge[t]_k=\langle k,y,w_k\rangle$$

このとき $w:=\begin{cases}\min(w_j,w_k) & \text{if } [s]_{m+1}=\ulcorner([s]_j\wedge[s]_k)\urcorner\\ \max(w_j,w_k) & \text{if } [s]_{m+1}=\ulcorner([s]_j\vee[s]_k)\urcorner\end{cases}$ とおき，$t:=t_j^\frown t_k^\frown[\langle m+1,y,w\rangle]$ と定めればこの t で $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s\restriction(m+2),t)$ が成り立つ．

<u>CaseI-5:</u> $[s]_{m+1}=\ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner$ のとき．ただし $j<m+1$.

いま $j\leq m$ なので帰納法の仮定 (♣) から t_j,l_j,w_j で以下を満たすものが存在する．

$$\mathrm{satseq}(s\restriction(j+1),t_j)\wedge\mathrm{lh}(t_j)>0\wedge l_j<\mathrm{lh}(t_j)\wedge[t]_l=\langle j,y,w_j\rangle$$

このとき $w:=1-w_j$ とおき，$t:=t_j^\frown[\langle m+1,y,w\rangle]$ と定めればこの t で $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s\restriction(m+2),t)$ が成り立つ． □

補題 3.94.

$$\mathrm{RCA}_0\vdash\forall s,t,s',t',i,i',l,l',w,w',y$$

$$[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\wedge\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t')\wedge[s]_i=[s']_{i'}\wedge[t]_l=\langle i,y,w\rangle\wedge[t']_{l'}=\langle i',y,w'\rangle\rightarrow w=w']$$

証明. s,t,s',t' を任意にとって固定しておく．次の論理式を $\varphi(x,s,t,s',t')$ とおき，$\forall x\varphi(x,s,t,s',t')$ を示せば十分．

$$\begin{aligned}\forall l,l'\leq x\forall y,i,i',w,w'[&\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\wedge\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t')\wedge[s]_i=[s']_{i'}\\&\wedge[t]_l=\langle i,y,w\rangle\wedge[t']_{l'}=\langle i',y,w'\rangle\rightarrow w=w']\end{aligned}$$

<u>Base:</u> $x=0$，すなわち $l=l'=0$ の場合．

以下を満たす y, i, i', w, w' を任意にとる．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \wedge \mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \wedge [s]_i = [s']_{i'} \wedge [t]_0 = \langle i, y, w\rangle \wedge [t']_0 = \langle i', y, w'\rangle$$

このとき，$[s]_i$ と $[s']_{i'}$ はともに原始論理式か有界量化の論理式である．後者なら $w = w'$ は明らかなのでともに原子論理式であるとする．このとき項の一意解読性からある $\mathrm{term}(u), \mathrm{term}(u')$ なる u, u' によって

$$[s]_i = \ulcorner(u = u')\urcorner = [s']_{i'} \text{もしくは} [s]_i = \ulcorner(u < u')\urcorner = [s']_{i'}$$

である．前者なら

$$w = 1 \leftrightarrow \mathrm{val}(u, y') = \mathrm{val}(u', y) \leftrightarrow w' = 1$$

であり，後者なら

$$w = 1 \leftrightarrow \mathrm{val}(u, y') < \mathrm{val}(u', y) \leftrightarrow w' = 1$$

となるのでいずれにせよ $w = w'$ である．

Induction:

以下を満たす $l, l' \leq x+1, y, i, i', w, w'$ を任意にとる．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \wedge \mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \wedge [s]_i = [s']_{i'} \wedge [t]_l = \langle i, y, w\rangle \wedge [t']_{l'} = \langle i', y, w'\rangle$$

$[s]_i$ の形に応じて場合分けをする．

CaseI-1: $[s]_i = [s']_{i'}$ が原始論理式の場合．

Base と全く同様である．

CaseI-2: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner (j, k < i)$ のとき．

$j', k' < i'$ で $[s']_{i'} = \ulcorner([s']_{j'} \wedge [s']_{k'})\urcorner$ となるものが存在する（$[s']_{i'}$ が他の形の場合矛盾が生じる）．すると論理式の一意解読性より $[s]_j = [s']_{j'}$ かつ $[s]_k = [s']_{k'}$ である．いま $\mathrm{satseq}(s,t)$, $\mathrm{satseq}(s',t')$ であるから，以下を満たす $l_1, l_2 < l, w_1, w_2 \leq 1, l'_1, l'_2 < l, w'_1, w'_2 \leq 1$ が存在する．

$$[t]_{l_1} = \langle j, y, w_1\rangle \wedge [t]_{l_2} = \langle k, y, w_2\rangle \wedge (w = 1 \leftrightarrow w_1 = 1 \wedge w_2 = 1)$$

$$[t]_{l'_1} = \langle j', y, w'_1\rangle \wedge [t']_{l'_2} = \langle k', y, w_2\rangle \wedge (w' = 1 \leftrightarrow w'_1 = 1 \wedge w'_2 = 1)$$

いま $l_1, l_2 \leq x$ で $[s]_j = [s']_{j'}$ だったことを思い出せば帰納法の仮定によって $w_1 = w'_1$ だと分かる．同様に $w_2 = w'_2$ でもあるので $w = w'$ が成り立つ．

CaseI-3: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner (j, k < i)$ のとき．

CaseI-2 と同様である．

CaseI-4: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner (j < i)$ のとき．

CaseI-2 と同様の議論をすればよいので省略する．

CaseI-5: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge [s]_j))\urcorner$ のとき．ただし $j < i, k \leq s, \mathrm{term}(u)$.

$j' < i'$ で $[s']_{i'} = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge [s']_{j'}))\urcorner$ となるものが存在する．このとき $[s]_j = [s']_{j'}$ であり，$\mathrm{satseq}(s,t)$ と $\mathrm{satseq}(s',t')$ より

$$\forall r < \mathrm{val}(u,y)[\exists l_1 < l \exists w_1 \leq 1([t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], w_1\rangle) \wedge \exists l'_1 < l' \exists w'_1 \leq 1([t']_{l'_1} = \langle j', y[r/k], w'_1\rangle)]$$

であり，

$$w = 1 \leftrightarrow \exists r < \mathrm{val}(u,y)\exists l_1 < l([t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], 1\rangle)$$

$$w' = 1 \leftrightarrow \exists r < \mathrm{val}(u,y)\exists l'_1 < l([t']_{l'_1} = \langle j', y[r/k], 1\rangle)$$

となる．したがって $w = 1$ と仮定すると，ある $r < \mathrm{val}(u,y)$ と $l_1 < l$ で $[t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], 1\rangle$ となる．この r に対して $[t']_{l'_1} = \langle j', y[r/k], w'_1\rangle)$ となる $l'_1 < l'$ と $w'_1 \le 1$ が存在する．ここで $[s]_j = [s']_{j'}$ だったことを思い出せば，帰納法の仮定から $w'_1 = 1$ が従うので $w' = 1$ でもある．全く同様にして $w' = 1 \Rightarrow w = 1$ も成り立つので $w = w'$ である．

<u>CaseI-6:</u> $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k < u)) \vee [s]_j))\urcorner$ のとき．ただし $j < i, k \le s, \mathrm{term}(u)$．

CaseI-5 と同様である．

□

定理 3.95. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall x, y(\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y) \leftrightarrow$

$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \wedge \forall s, t(s, t \text{ determines } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y) \to \exists i < \mathrm{lh}(s)\exists l < \mathrm{lh}(t)([t]_l = \langle i, y, 1\rangle \wedge [s]_i = x)))$

したがって $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ は $\Delta_1(\mathrm{RCA}_0)$ である．

証明. x, y は固定しておく．

($\to$) まず $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ の定義により，ある s, t で，

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \wedge \mathrm{last}(s) = x \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t)([t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, y, 1\rangle)$$

となるものが存在する．いま任意に s', t' をとって s', t' determines $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ と仮定したとき，その定義から $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t')$ であり，ある $l' < \mathrm{lh}(t')$ と $i' < \mathrm{lh}(s')$ と $w' \le 1$ で $[s']_{i'} = x \wedge [t']_{l'} = \langle i', y, w'\rangle$ となるものが存在する．するとある $l < \mathrm{lh}(t)$ で

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \wedge \mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \wedge [s']_{i'} = x = [s]_{\mathrm{lh}(s)-1} \wedge [t']_{l'} = \langle i', y, w'\rangle \wedge [t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, y, 1\rangle$$

となるので，補題 3.94 より $w' = 1$ が導かれる．

($\leftarrow$) 仮定より $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ なので補題 3.93 より s, t determines $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ を満たす s, t が存在する．するとこのとき再び仮定よりある $i < \mathrm{lh}(s)$ と $l < \mathrm{lh}(t)$ で $[t]_l = \langle i, y, 1\rangle \wedge [s]_i = x$ となるものが存在しているので，$s' := s^\frown[x], t' := t^\frown[\langle \mathrm{lh}(s') - 1, y, 1\rangle]$ とおけば

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \wedge \mathrm{last}(s') = x \wedge [t']_{\mathrm{lh}(t')-1} = \langle \mathrm{lh}(s') - 1, y, 1\rangle$$

が成り立つ．したがって $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ が得られたことになる． □

定理 3.96. 次が RCA_0 で証明可能.

$$
\begin{aligned}
\forall y, i, r, s, u, v\{\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge & \mathrm{form}_{\Delta_0}(u) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(v) \to \\
\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(r = s)\urcorner, y) &\leftrightarrow \mathrm{val}(r, y) = \mathrm{val}(s, y) & \wedge \\
\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(r < s)\urcorner, y) &\leftrightarrow \mathrm{val}(r, y) < \mathrm{val}(s, y) & \wedge \\
\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u \wedge v)\urcorner, y) &\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y) \wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y) & \wedge \\
\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y) &\leftrightarrow \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y) & \wedge \\
\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u \vee v)\urcorner, y) &\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y) \vee \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y) & \wedge \\
\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\exists \mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i < r) \wedge u)\urcorner, y) &\leftrightarrow \exists x < \mathrm{val}(r, y) \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i]) & \wedge \\
\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u))\urcorner, y)) &\leftrightarrow \forall x < \mathrm{val}(r, y) \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i])\}
\end{aligned}
$$

証明. y, i と $\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(u) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(v)$ を満たす r, s, u, v を任意にとって固定しておく.

<u>Claim1:</u> $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(r = s)\urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{val}(r, y) = \mathrm{val}(s, y)$.

($\to$) 仮定より次を満たす s, t が存在する.

$$
\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = \ulcorner(r = s)\urcorner \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t)([t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, y, 1\rangle) \tag{3.24}
$$

よってある $l < \mathrm{lh}(t)$ で $[t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, y, 1\rangle)$ であって $[s]_{\mathrm{lh}(s)-1} = \mathrm{last}(s) = \ulcorner(r = s)\urcorner$ なので $\mathrm{val}(r, y) = \mathrm{val}(s, y)$ となる.

($\leftarrow$) $s = [\ulcorner(r = s)\urcorner], t = [\langle 0, y, 1\rangle]$ とすれば 3.24 が満たされる.

<u>Claim2:</u> $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(r = s)\urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{val}(r, y) < \mathrm{val}(s, y)$.

Claim1 と同様である.

<u>Claim3:</u> $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u \wedge v)\urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y) \wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y)$.

($\to$) 仮定より次を満たす s, t が存在する

$$
\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = \ulcorner(u \wedge v)\urcorner \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t)([t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, y, 1\rangle)
$$

このとき $\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)$ と論理式の一意解読性よりある $j, k < \mathrm{lh}(s) - 1$ が存在して

$$
\ulcorner(u \wedge v)\urcorner = [s]_{\mathrm{lh}(s)-1} = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner
$$

となり，$[s]_j = u \wedge [s]_k = v$ でもある．よって $l_1, l_2 < l$ で以下を満たすものが存在する.

$$
[t]_{l_1} = \langle j, y, 1\rangle \wedge [t]_{l_2} = \langle k, y, 1\rangle
$$

したがって $s \upharpoonright (j + 1), t \upharpoonright (l_1 + 1)$ によって

$$
\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j + 1), t) \wedge \mathrm{last}(s \upharpoonright (j + 1)) = [s]_j = u \wedge [t \upharpoonright (l_1 + 1)]_{l_1} = \langle s \upharpoonright (j + 1) - 1, y, 1\rangle)
$$

が成り立つので $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y)$ が分かり，同様に $s \upharpoonright (k + 1), t \upharpoonright (l_2 + 1)$ によって $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y)$ が分かる.

($\leftarrow$) $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y)$ と $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y)$ から以下を満たす s, t, s', t' がとれる.

$$
\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = u \wedge \exists l < \mathrm{lh}(t)([t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, y, 1\rangle)
$$

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = v \land \exists l < \mathrm{lh}(t')([t']_l = \langle \mathrm{lh}(s') - 1, y, 1\rangle)$$

よって $s'' := s^\frown s'^\frown[\ulcorner(u \land v)\urcorner], t'' := t^\frown t'^\frown[\langle \mathrm{lh}(s) + \mathrm{lh}(s'), y, 1\rangle]$ によって

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s'',t'') \land \mathrm{last}(s'') = \ulcorner(u \land v)\urcorner \land ([t'']_{\mathrm{lh}(t'')-1} = \langle \mathrm{lh}(s'') - 1, y, 1\rangle)$$

が成り立つので $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u \land v)\urcorner, y)$ が分かる．

Claim4: $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y) \leftrightarrow \neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y)$.

$(\to)$

仮定より次を満たす s, t が存在する

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \land \mathrm{last}(s) = \ulcorner(\neg u)\urcorner \land \exists l < \mathrm{lh}(t)([t]_l = \langle \mathrm{lh}(s) - 1, y, 1\rangle)$$

このとき $\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)$ と論理式の一意解読性よりある $j < \mathrm{lh}(s) - 1$ が存在して

$$\ulcorner(\neg u)\urcorner = [s]_{\mathrm{lh}(s)-1} = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner$$

となり，$[s]_j = u$ でもある．よって $l_1 < \mathrm{lh}(t)$ で $[t]_{l_1} = \langle j, y, 0\rangle$ を満たすものが存在する．さて，いま示すべきは $\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y)$ すなわち

$$\forall s', t'[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = u \to \neg(\exists l' < \mathrm{lh}(t')([t']_{l'} = \langle \mathrm{lh}(s') - 1, y, 1\rangle))]$$

であるので，まず任意に $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = u$ を満たす s', t' をとる．もし仮にある $l' < \mathrm{lh}(t')$ が存在して $[t']_{l'} = \langle \mathrm{lh}(s') - 1, y, 1\rangle)$ が成り立つとすると，

$$[s']_{\mathrm{lh}(s')-1} = u = [s]_j$$

なので補題 3.94 より $0 = 1$ が導かれて矛盾する．

$(\leftarrow)$ まず $\mathrm{form}_{\Delta_0}(u)$ より $\mathrm{form}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner)$ なので，補題 3.93 より，ある s, t で s, t determines $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y)$ すなわち

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \land \exists l < \mathrm{lh}(t) \exists i < \mathrm{lh}(s) \exists w \leq 1([s]_i = \ulcorner(\neg u)\urcorner \land [t]_l = \langle i, y, w\rangle)$$

が成り立つ．よってここで $l < \mathrm{lh}(t), i < \mathrm{lh}(s), w \leq 1$ を $[s]_i = \ulcorner(\neg u)\urcorner \land [t]_l = \langle i, y, w\rangle$ となるようにとれば，論理式の一意解読性と $\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)$ よりある $j < i$ で $[s]_i = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner$ かつ $[s]_j = u$ となる．してがってある $l_1 < l$ と $w_1 \leq 1$ で $[t]_{l_1} = \langle j, y, w_1\rangle$ を満たすものが存在する．このとき

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}((s \restriction (j+1)), t \restriction (l_1+1)) \land \mathrm{last}(s \restriction (j+1)) = u \land [t \restriction (l_1+1)]_{l_1} = \langle j, y, w_1\rangle$$

が成り立つ．いま $\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y)$ すなわち

$$\forall s', t'(\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = u \to \forall l' < \mathrm{lh}(t')[t']_{l'} \neq \langle \mathrm{lh}(s'), y, 1\rangle)$$

を仮定しているので $w_1 = 0$ だと分かる．ゆえに $w = 1 \leftrightarrow w_1 = 0$ より $w = 1$ が導かれる．以上から $s \restriction (i+1), t \restriction (l+1)$ によって $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y)$ だと分かる．

Claim5: $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u\vee v)\urcorner,y)\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\vee\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)$.

($\rightarrow$) Claim3 の ($\rightarrow$) と同様である．

($\leftarrow$)

Case(i) $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\wedge\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)$ のとき．

Claim3 の ($\leftarrow$) と同様である．

Case(ii) $\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\wedge\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)$ のとき．

Claim3,4 より

$$\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\wedge\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner,y)\wedge\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner((\neg u)\wedge v)\urcorner,y)$$

であり，Sat_{Δ_0} の定義より明らかに $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner((\neg u)\wedge v)\urcorner,y)\rightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u\vee v)\urcorner,y)$ である．

Case(iii) $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\wedge\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)$ のとき．

Case(ii) と同様である．

Claim6: $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge u))\urcorner,y)\leftrightarrow\exists x<\mathrm{val}(r,y)\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[x/i])$.

($\rightarrow$) 仮定より以下を満たす s,t が存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\wedge\mathrm{last}(s)=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge u))\urcorner\wedge\exists l<\mathrm{lh}(t)([t]_l=\langle\mathrm{lh}(s)-1,y,1\rangle)$$

このときある $j<\mathrm{lh}(s)$ が存在して，

$$\begin{aligned}[s]_{\mathrm{lh}(s)-1}&=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge u))\urcorner\\&=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge[s]_j))\urcorner\end{aligned}$$

となり $[s]_j=u$ が成り立つ．またある $l<\mathrm{lh}(t)$ で $[t]_l=\langle\mathrm{lh}(s)-1,y,1\rangle$ となることから，$x<\mathrm{val}(r,y)$ と $l_1<l$ が存在して $[t]_{l_1}=\langle j,y[x/i],1\rangle$ である．したがって $s\restriction(j+1),t\restriction(l_1+1)$ によって

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}((s\restriction(j+1)),t\restriction(l_1+1))\wedge\mathrm{last}(s\restriction(j+1))=u\wedge[t\restriction(l_1+1)]_{l_1}=\langle j,y[x/i],1\rangle$$

であるので $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[x/i])$ だと分かる．

($\leftarrow$) 対偶を示す．$\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge u))\urcorner,y)$ すなわち $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge u)))\urcorner,y)$ を仮定する．このときもし仮にある $x<\mathrm{val}(r,y)$ が存在して $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[x/i])$ が成り立ったとすると，ある s',t' と $l'<\mathrm{lh}(t')$ で以下を満たすものが存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t')\wedge\mathrm{last}(s')=u\wedge[t']_{l'}=\langle\mathrm{lh}(s')-1,y[x/i],1\rangle$$

一方 $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge u)))\urcorner,y)$ よりを次を満たす s,t と $l<\mathrm{lh}(t)$ が存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\wedge\mathrm{last}(s)=\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge u)))\urcorner\wedge[t]_l=\langle\mathrm{lh}(s)-1,y,1\rangle$$

するとある $j<k<\mathrm{lh}(s)$ が存在して，

$$\begin{aligned}[s]_{\mathrm{lh}(s)-1}&=\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge u)))\urcorner\\&=\ulcorner(\neg[s]_k)\urcorner\\&=\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\wedge[s]_j)))\urcorner\end{aligned}$$

となり $[s]_k = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i < r) \wedge [s]_j))\urcorner$ と $[s]_j = u$ も成り立つ．また $[t]_l = \langle \mathrm{lh}(s)-1, y, 1\rangle$ よりある $l_k < l$ で $[t]_{l_k} = \langle k, y, 0\rangle$ となり，

$$\forall z < \mathrm{val}(r,y)\exists l_j < l_k \exists w \leq 1([t]_{l_j} = \langle j, y[z/i], w\rangle) \wedge \forall z < \mathrm{val}(r,y)\forall l_j < l_k([t]_{l_j} = \langle j, y[z/i], 0\rangle)$$

が成り立つ．よって特に $x(< \mathrm{val}(r,y))$ について，ある $l_1 < l_k$ が存在して $[t]_{l_1} = \langle j, y[x/i], 0\rangle$ が成り立つが，

$$[s]_j = u = [s']_{\mathrm{lh}(s)-1} \wedge [t]_{l_1} = \langle j, y[x/i], 0\rangle \wedge [t']_{l'} = \langle \mathrm{lh}(s')-1, y[x/i], 1\rangle$$

なので補題 3.94 より $0 = 1$ が導かれて矛盾する．

Claim7: $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u))\urcorner, y)) \leftrightarrow \forall x < \mathrm{val}(r,y)\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i])$

Claim6 と同様である．

($\leftarrow$) 対偶を示す．$\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u))\urcorner, y)$ と仮定すると Claim4 より $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u)))\urcorner, y)$ であるので，以下を満たす s, t および $l < \mathrm{lh}(t)$ が存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \wedge \mathrm{last}(s) = \ulcorner(\neg(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u)))\urcorner \wedge [t]_l = \langle \mathrm{lh}(s)-1, y, 1\rangle$$

このときある $j < k < \mathrm{lh}(s)-1$ で

$$\begin{aligned}[s]_{\mathrm{lh}(s)-1} &= \ulcorner(\neg(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u)))\urcorner \\ &= \ulcorner(\neg[s]_k)\urcorner \\ &= \ulcorner(\neg(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee [s]_j)))\urcorner.\end{aligned}$$

となり $[s]_k = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee [s]_j))\urcorner$ と $[s]_j = u$ も成り立つ．また $[t]_l = \langle \mathrm{lh}(s)-1, y, 1\rangle$ よりある $l_k < l$ が存在して $[t]_{l_k} = \langle k, y, 0\rangle$ となるので

$$\forall z < \mathrm{val}(r,y)\exists l_j < l_k \exists w \leq 1([t]_{l_j} = \langle j, y[z/i], w\rangle) \wedge \exists z < \mathrm{val}(r,y)\forall l_j < l_k([t]_{l_j} = \langle j, y[z/i], 0\rangle)$$

が成り立つ．したがってある $x < \mathrm{val}(r,y)$ と $l_j < l_k$ が存在して $[t]_{l_j} = \langle j, y[x/i], 0\rangle$ が導かれる．するとこの x で $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y[x/i])$ すなわち $\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i])$ が成り立つ． □

系 3.97. L_1 の任意の Δ_0 論理式 $\theta(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)$（論理式に含まれる自由変数は $\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_k$ のみ）に対して次が成り立つ．

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall a_0, ..., a_{n-1}, b[\theta(a_0, ..., a_{n-1}) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\theta(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_{n-1})\urcorner, [a_0, ..., a_{n-1}]^\frown b)]$$

証明． L_1 論理式の複雑さによる帰納法で示す．

Base: 原子論理式の場合

まず $\theta(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_{n-1})$ を $(r(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_{n-1}) = s(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_{n-1}))$ とする（r, s は本物の数項）．すると系 3.89 より任意にとった $a_0, ..., a_{n-1}, b$ について

$$r(a_0, ..., a_{n-1}) = \mathrm{val}(\ulcorner r\urcorner, [x_0, ..., x_{n-1}]^\frown[b]) \wedge s(a_0, ..., a_{n-1}) = \mathrm{val}(\ulcorner s\urcorner, [x_0, ..., x_{n-1}]^\frown[b])$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
r(a_0,...,a_{n-1}) = s(a_0,...,a_{n-1}) &\leftrightarrow \mathrm{val}(\ulcorner r \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown[b]) = \mathrm{val}(\ulcorner s \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown[b]) \\
&\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (r = s) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown[b])
\end{aligned}
$$

$\theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1})$ が $(r < s)$ である場合も同様.

<u>induction:</u>

$\theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) = \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \land \theta_v(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1})$ なら帰納法の仮定から 任意の $a_0,...,a_{n-1},b$ について

$$
\begin{aligned}
&\theta(a_0,...,a_{n-1}) \leftrightarrow \theta_u(a_0,...,a_{n-1}) \land \theta_v(a_0,...,a_{n-1}) \\
&\quad \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \land \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta_v(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \\
&\quad \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)
\end{aligned}
$$

となる．本質的なのは存在量化である．束縛変数の位置で場合分けして考える．

<u>Case1:</u> $\theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) = \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \land \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1}))$

任意の $a_0,...,a_{n-1},b$ について

$$
\begin{aligned}
&\theta(a_0,...,a_{n-1}) \leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \land \theta_u(a_0,...,\mathsf{v}_k,...,a_{n-1})) \\
&\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < r\ \theta_u(a_0,...,\mathsf{v}_k,...a_{n-1}) \quad (\text{上の略記}) \\
&\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で} \theta_u(a_0,...,x,...a_{n-1}) \\
&\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,x,...a_{n-1}]^\frown b) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, ([a_0,...,a_k,...,a_{n-1}]^\frown b)[x/k]) \\
&\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < r\ \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[\mathsf{v}_k/k])) \\
&\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < \mathrm{val}(\ulcorner r \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1})) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[\mathsf{v}_k/k]) \\
&\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \land \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1})) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \quad (\because \text{定理 } 3.96) \\
&\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)
\end{aligned}
$$

<u>Case2:</u> $\theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) = \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \land \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k))$

任意の $a_0,...,a_{n-1},b$ について

$$
\begin{aligned}
&\theta(a_0,...,a_{n-1}) \leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \land \theta_u(a_0,...,a_{n-1},...,\mathsf{v}_k)) \\
&\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < r\ \theta_u(a_0,...,a_{n-1},...,\mathsf{v}_k) \quad (\text{上の略記}) \\
&\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で} \theta_u(a_0,...,a_{n-1},...,x) \\
&\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k)) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[x/k]) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < r\ \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[\mathsf{v}_k/k]) \\
&\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < \mathrm{val}(\ulcorner r \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[\mathsf{v}_k/k])) \\
&\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \land \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k)) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \quad (\because \text{定理 } 3.96) \\
&\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)
\end{aligned}
$$

$\square$

3.6 代入関数の構成

”項 e 中の i 番目の変数に項 t 代入する” 関数 $\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(e,i,t)$ を定義することからはじめよう．アイデアは val を定義したときと同じで，項 s の構成過程列に沿って，代入された項の構成過程列を形成すればよい．

定義 3.98. $\mathrm{substseq}_{\mathrm{term}}(s,p,i,t)$ を次の論理式と定める．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{termseq}(s) \land \mathrm{lh}(p) = \mathrm{lh}(s) \land \\
&\qquad \forall j < \mathrm{lh}(s) \{ ([s]_j = \ulcorner 0 \urcorner \land [p]_j = \ulcorner 0 \urcorner) \lor \\
&\qquad\qquad ([s]_j = \ulcorner 1 \urcorner \land [p]_j = \ulcorner 1 \urcorner) \lor \\
&\qquad\qquad \exists k \le s ([s]_j = \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \land [([p]_j = t \land k = i) \lor ([p]_j = \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \land k \ne i)]) \lor \\
&\qquad\qquad \exists l, m < j ([s]_j = \ulcorner ([s]_l + [s]_m) \urcorner \land [p]_j = \ulcorner ([p]_l + [p]_m) \urcorner) \lor \\
&\qquad\qquad \exists l, m < j ([s]_j = \ulcorner ([s]_l \cdot [s]_m) \urcorner \land [p]_j = \ulcorner ([p]_l \cdot [p]_m \urcorner)) \}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(e,i,t) = d$ を次の論理式と定める．

$$
\exists s, p [(\mathrm{substseq}_{\mathrm{term}}(s,p,i,t) \land \mathrm{last}(s) = e \land \mathrm{last}(p) = d)] \lor (\neg \mathrm{term}(e) \land d = 0)
$$

命題 3.99. $\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall e, i, t \exists ! d (\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(e,i,t) = d)$.

証明. val のときと同様. □

命題 3.100. RCA_0 で次が証明可能.

(1) $\forall t, i (\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(\ulcorner 0 \urcorner, i, t) = \ulcorner 0 \urcorner \land \mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(\ulcorner 1 \urcorner, i, t) = \ulcorner 1 \urcorner)$

(2) $\forall t, k, i \left[\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(\ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner, i, t) = \begin{cases} t & \text{if } k = i \\ \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner & \text{if } k \ne i \end{cases} \right]$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\forall u, v, z (\mathrm{term}(u) \land \mathrm{term}(v) \to \\
&\qquad \mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(\ulcorner (u+v) \urcorner, i, t) = \ulcorner (\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(u,i,t) + \mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(v,i,t)) \urcorner \land \\
&\qquad \mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(\ulcorner (u \cdot v) \urcorner, i, t) = \ulcorner (\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(u,i,t) \cdot \mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(v,i,t)) \urcorner)
\end{aligned}
$$

証明. val のときと同様. □

定義 3.101 (RCA_0)**.** $z \mapsto \underbrace{\ulcorner (\cdots ((1+1)+1) + \cdots + 1) \urcorner}_{1 \text{ が } z \text{ 個}}$ を与える関数が以下のように定義できる．

$$
\begin{cases}
\mathrm{num}(0) & = \ulcorner 0 \urcorner \\
\mathrm{num}(z+1) & = \ulcorner (\mathrm{num}(z) + 1) \urcorner
\end{cases}
$$

命題 3.102.

$$
\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall n, y, z (\mathrm{val}(\ulcorner \mathsf{v}_n \urcorner, y[z/n]) = \mathrm{val}(\mathrm{num}(z), y) = z)
$$

証明. z に関する帰納法. $z=0$ なら自明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(\mathrm{num}(z+1),y) &= \mathrm{val}(\ulcorner \mathrm{num}(z)+1\urcorner, y)\\
&= \mathrm{val}(\mathrm{num}(z),y)+\mathrm{val}(\ulcorner 1\urcorner,y)\\
&= z+1 && (\because \text{帰納法の仮定})\\
&= \mathrm{val}(\ulcorner \mathsf{v}_n\urcorner, y[z+1/n])
\end{aligned}$$

□

次は n 番目以外の変数の割り当てを y としたとき, ”項 t の n 番目の変数に自然数 z を代入した値 = 項 t の n 番目の変数を $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{z\text{ 個}}$ に変換した項の値”を意味している.

系 3.103.

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall t,n,y,z[\mathrm{term}(t)\to \mathrm{val}(t,y[z/n])=\mathrm{val}(\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(t,n,\mathrm{num}(z)),y)]$$

証明. 項 t の文字列としての長さ $\mathrm{lh}(t)=l$ による帰納法. $l=0$ は先の命題から即座に従う. $l>1$ なら例えば

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}(\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(\ulcorner(u+v)\urcorner,n,\mathrm{num}(z)),y)\\
&\qquad= \mathrm{val}(\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(u,n,\mathrm{num}(z)),y)+\mathrm{val}(\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(v,n,\mathrm{num}(z)),y) && (\because \text{命題 }3.100\text{ と }3.88)\\
&\qquad= \mathrm{val}(u,y[z/n])+\mathrm{val}(v,y[z/n]) && (\because \text{帰納法の仮定})\\
&\qquad= \mathrm{val}(\ulcorner(u+v)\urcorner,y[z/n])
\end{aligned}$$

□

定義 3.104. $\mathrm{substseq}_{\mathrm{form}}(s,p,i,t)$ を次の論理式と定める.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{formseq}(s)\land \mathrm{lh}(p)=\mathrm{lh}(s)\land\\
&\forall j<\mathrm{lh}(s)\{\exists u,v\subseteq_{\mathrm{p}}[s]_j(\mathrm{term}(u)\land\mathrm{term}(v)\land[s]_j=\ulcorner(u=v)\urcorner\\
&\qquad\qquad\land[p]_j=\ulcorner(\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(u,i,t)=\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(v,i,t))\urcorner)\lor\\
&\quad\exists u,v\subseteq_{\mathrm{p}}[s]_j(\mathrm{term}(u)\land\mathrm{term}(v)\land[s]_j=\ulcorner(u<v)\urcorner\\
&\qquad\qquad\land[p]_j=\ulcorner(\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(u,i,t)<\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(v,i,t))\urcorner)\lor\\
&\quad\exists l,m<j([s]_j=\ulcorner([s]_l\land[s]_m)\urcorner\land[p]_j=\ulcorner([p]_l\land[p]_m\urcorner))\lor\\
&\quad\exists l,m<j([s]_j=\ulcorner([s]_l\lor[s]_m)\urcorner\land[p]_j=\ulcorner([p]_l\lor[p]_m\urcorner))\lor\\
&\quad\exists l<j([s]_j=\ulcorner(\neg[s]_l)\urcorner\land[p]_j=\ulcorner(\neg[p]_l)\urcorner)\lor\\
&\quad\exists l<j\exists k\le s([s]_j=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_k[s]_l)\urcorner\land(([p]_j=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_k[p]_l)\urcorner\land k\ne i)\lor([p]_j=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_k[s]_l)\urcorner\land k=i)))\lor\\
&\quad\exists l<j\exists k\le s([s]_j=\ulcorner(\forall\mathsf{v}_k[s]_l)\urcorner\land(([p]_j=\ulcorner(\forall\mathsf{v}_k[p]_l)\urcorner\land k\ne i)\lor([p]_j=\ulcorner(\forall\mathsf{v}_k[s]_l)\urcorner\land k=i)))\}
\end{aligned}$$

$\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(e,i,t)=d$ を次の論理式と定める.

$$\exists s,p[(\mathrm{substseq}_{\mathrm{form}}(s,p,i,t)\land\mathrm{last}(s)=e\land\mathrm{last}(p)=d)]\lor(\neg\mathrm{form}(e)\land d=0)$$

命題 3.105. $\mathrm{RCA}_0\vdash\forall e,i,t\exists! d(\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(e,i,t)=d)$.

命題 3.106. RCA_0 で次が証明可能.

(1)

$$\begin{aligned}\forall u,v,t,i(\mathrm{term}(t)\land\mathrm{term}(u)\land\mathrm{term}(v)\to\\ &\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(\ulcorner(u<v)\urcorner,i,t)=\ulcorner(\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(u,i,t)<\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(v,i,t))\urcorner\land\\ &\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(\ulcorner(u=v)\urcorner,i,t)=\ulcorner(\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(u,i,t)=\mathrm{subst}_{\mathrm{term}}(v,i,t))\urcorner)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\forall e,d,t,i(\mathrm{term}(t)\land\mathrm{form}(e)\land\mathrm{form}(d)\to\\ &\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(\ulcorner(e\land d)\urcorner,i,t)=\ulcorner(\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(e,i,t)\land\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(d,i,t))\urcorner\land\\ &\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(\ulcorner(e\lor d)\urcorner,i,t)=\ulcorner(\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(e,i,t)\lor\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(d,i,t))\urcorner\land\\ &\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(\ulcorner(\neg e)\urcorner,i,t)=\ulcorner(\neg\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(e,i,t))\urcorner)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\forall e,t,i(\mathrm{term}(t)\land\mathrm{form}(e)\to\\ &\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(\ulcorner(\exists\mathsf{v}_k e)\urcorner,i,t)=\begin{cases}\ulcorner(\exists\mathsf{v}_k\ \mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(e,i,t))\urcorner & \text{if } k\neq i\\ \ulcorner(\exists\mathsf{v}_k e)\urcorner & \text{if } k=i\end{cases}\end{aligned}$$

n がメタではなく形式的な自然数として S^1_n 関数が定義できる.

定義 3.107 (RCA_0)**.** $S^1_n(e,z):=\begin{cases}\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}(e,n,\mathrm{num}(z)) & \text{if } \mathrm{form}_{\Delta_0}(e)\\ e+z & \text{otherwise}\end{cases}$

定理 3.108 (Sat_{Δ_0} と $\mathrm{subst}_{\mathrm{form}}$ の整合性)**.** 次が RCA_0 で証明可能.

$$\begin{aligned}&\forall n,y,k,r,s,u,v\{\mathrm{term}(r)\land\mathrm{term}(s)\land\mathrm{form}_{\Delta_0}(u)\land\mathrm{form}_{\Delta_0}(v)\land\mathrm{lh}(y)=n\land k\neq n\to\\ &\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S^1_n(\ulcorner(r=s)\urcorner,z),y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(r=s)\urcorner,y[z/n]) \land\\ &\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S^1_n(\ulcorner(r<s)\urcorner,z),y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(r<s)\urcorner,y[z/n]) \land\\ &\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S^1_n(\ulcorner(u\land v)\urcorner,z),y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[z/n])\land\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y[z/n]) \land\\ &\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S^1_n(\ulcorner(u\lor v)\urcorner,z),y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[z/n])\lor\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y[z/n]) \land\\ &\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S^1_n(\ulcorner(\neg u)\urcorner,z),y)\leftrightarrow\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[z/n]) \land\\ &\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S^1_n(\ulcorner(\exists\mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k<r)\land u)\urcorner,y)))\leftrightarrow\exists x<\mathrm{val}(r,y[z/n])\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[x/n]) \land\\ &\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S^1_n(\ulcorner(\forall\mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i<r))\lor u))\urcorner,y))\leftrightarrow\forall x<\mathrm{val}(r,y[z/n])\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[x/n])\}\end{aligned}$$

証明. すでに示したことを組み合わせることで容易に示せる. □

系 3.109. 各 $1\leq n\in\omega$ について次が正しい.

$$\mathrm{RCA}_0\vdash\forall e,x_0,...,x_{n-1},z(\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(S^1_n(e,z),[x_0,...,x_{n-1}])\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(e,[x_0,...,x_{n-1},z]))$$

参考文献

[1] Stephen G. Simpson,Subsystems of Second Order Arithmetic, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1999

[2] 篠田 寿一 , 帰納的関数と述語 , 河合文化教育研究所, 1997.

[3] Robert I. Soare,Turing Computability:Theory and Applications,Springer, 2016.

[4] Richard Kaye, Models of Peano Arithmetic, Oxford University Press,1991.