lemma8.7

橋本航気

2022 年 2 月 19 日

概要

本稿の証明は Kaye [1] のそれをある程度のまとまりに分けて再構築したものである.

補題 0.1. $M \models PA$ とする。$\varphi(x)$ を $M \models \mathsf{Q}x\varphi(x)$ を満たす $\mathscr{L}_A(M)$ 論理式とし、任意に $\mathscr{L}_A(M)$ 論理式 $\theta(x, y)$ をとる。このとき、以下を満たす $\mathscr{L}_A(M)$ 論理式 $\psi(x)$ が存在する。

(a) $M \models \mathsf{Q}x\psi(x)$

(b) $M \models \forall x(\psi(x) \to \varphi(x))$

(c) すべての $\overline{a} \in M$ に対して、以下のいずれかが成り立つ。

$$M \models \exists y \forall x(x > y \wedge \psi(x) \to \theta(x, \overline{a})) \text{ または } M \models \exists y \forall x(x > y \wedge \psi(x) \to \neg\theta(x, \overline{a}))$$

証明. まず $\theta(x, \overline{y})$ は $\forall w(w = \langle \overline{y} \rangle \to \theta(x, \overline{w}))$ と PA 上同値なので、初めから $\overline{y}$ はひとつの変数だと思うことにする。

$\chi(x, y, s)$ を以下の論理式とする。

$$\varphi(x) \wedge \forall u < y[(s)_u = 0 \leftrightarrow \theta(x, u)]$$

$\chi(x, y, s)$ は直感的には $\varphi(x) \wedge \bigwedge_{u<y} (\neg)^{(s)_u} \theta(x, u)$ を意味する。ただしここで $(\neg)^{(s)_u}$ とは、$(s)_u = 0$ のときに空でそうでないとき $\neg$ である。

<u>Claim1:</u> $\chi(x, y, s)$ について次が成り立つ。

(i) $M \models \forall y \exists s \forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0)$。

(ii) 各 $y \in M$ に対し、(i) を満たす s は以下の意味で一意的である。

$$\begin{aligned} M \models \forall y \forall s, s'[&\forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \wedge \\ &\forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z, u, s') \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s')_u = 0) \\ &\to \forall u < y((s)_u = 0 \leftrightarrow (s')_u = 0) \wedge \forall x \forall u \leq y(\chi(x, u, s) \leftrightarrow \chi(x, u, s'))]。\end{aligned}$$

(i) は Kaye [1] 補題 5.8 を用いて y に関する帰納法で容易に示せる。(ii) を y に関する帰納法で示す。$y = 0$ は明らかである。いま $s, s' \in M$ を

$$\begin{aligned} M \models &\forall u < y + 1(\mathsf{Q}z(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \wedge \\ &\forall u < y + 1(\mathsf{Q}z(\chi(z, u, s') \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s')_u = 0) \end{aligned}$$

を満たすようにとれば、帰納法の仮定から

$$M \models \forall u < y((s)_u = 0 \leftrightarrow (s')_u = 0) \land \forall x \forall u \leq y(\chi(x,u,s) \leftrightarrow \chi(x,u,s'))$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} M \models (s)_y = 0 &\leftrightarrow \mathsf{Q}z(\chi(z,y,s) \land \theta(z,y)) \\ &\leftrightarrow \mathsf{Q}z(\chi(z,y,s') \land \theta(z,y)) && (\because \chi\text{の定義}) \\ &\leftrightarrow (s')_y = 0 \end{aligned}$$

より $M \models \forall u < y+1((s)_u = 0 \leftrightarrow (s')_u = 0)$ が成り立つ。したがって任意の $x \in M$ に対し

$$\begin{aligned} M \models \chi(x,y+1,s) &\Leftrightarrow M \models \varphi(x) \land \forall u < y+1[(s)_u = 0 \leftrightarrow \theta(x,u)] \\ &\Leftrightarrow M \models \varphi(x) \land \forall u < y+1[(s')_u = 0 \leftrightarrow \theta(x,u)] \\ &\Leftrightarrow M \models \chi(x,y+1,s') \end{aligned}$$

が成り立つので $M \models \forall x \forall u \leq y+1(\chi(x,u,s) \leftrightarrow \chi(x,u,s'))$ も得られる。以上で帰納法が完了した。Claim1 の証明終わり。

次に $\delta(x,y)$ を以下の論理式とする。

$$\exists s[\forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s) \land \theta(z,u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \land \chi(x,y,s)]$$

Claim2: $M \models \forall y \mathsf{Q}x\delta(x,y)$

y に関する帰納法で示す。$y = 0$ なら

$$\begin{aligned} \delta(x,0) &\leftrightarrow \exists s[\forall u < 0(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s) \land \theta(z,u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \land \chi(x,0,s)] \\ &\leftrightarrow \exists s\chi(x,0,s) \\ &\leftrightarrow \exists s[\varphi(x) \land \forall u < 0[(s)_y = 0 \leftrightarrow \theta(x,u)]] \\ &\leftrightarrow \varphi(x) \end{aligned}$$

であるので $M \models \forall x(\delta(x,0) \leftrightarrow \varphi(x))$ となり、$M \models \mathsf{Q}x\varphi(x)$ だったことから結論が従う。次に $y \in M \models \mathsf{Q}x\delta(x,y)$ だと仮定する。すると Claim1(i) より次を満たす $s \in M$ が存在する。

$$\forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s) \land \theta(z,u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \tag{0.1}$$

Subclaim2.1: $M \models \forall x(\chi(x,y,s) \leftrightarrow \delta(x,y))$

任意に $x \in M$ をとって固定しておく。このとき、

$$\begin{aligned} & M \models \chi(x,y,s) \\ \Rightarrow & M \models \forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s) \land \theta(z,u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \land \chi(x,y,s) && (\because \text{式 (0.1)}) \\ \Rightarrow & M \models \delta(x,y) \\ \Rightarrow & \text{ある } s' \in M \text{ で} M \models \forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s') \land \theta(z,u)) \leftrightarrow (s')_u = 0) \land \chi(x,y,s') \\ \Rightarrow & M \models \chi(x,y,s) && (\because \text{式 (0.1) と Claim1(ii)}) \end{aligned}$$

が成り立つ。Subclaim2.1 の証明終わり。

Subclaim2.2: $M \models \mathsf{Q}x(\delta(x,y) \land \theta(x,y)$ か $M \models \mathsf{Q}x(\delta(x,y) \land \neg\theta(x,y)$ の少なくとも一方は成り立つ。

もし仮に両方が成り立たないなら

$$M \models \exists w \forall x(x \geq w \to \neg\delta(x,y) \lor \neg\theta(x,y)) \text{ かつ } M \models \exists w \forall x(x \geq w \to \neg\delta(x,y) \lor \theta(x,y))$$

となり、双方の w の大きい方を考えることで

$$M \models \exists w \forall x(x \geq w \to \neg\delta(x,y))$$

が導かれて $M \models \mathsf{Q}x\delta(x,y)$ に反する。Subclaim2.2 の証明終わり。

Case1: $M \models \mathsf{Q}x(\delta(x,y) \land \theta(x,y))$ のとき。

Subclaim2.1 より $M \models \mathsf{Q}x(\chi(x,y,s) \land \theta(x,y))$ であるので、$M \models \forall x(\chi(x,y,s) \land \theta(x,y) \to \delta(x,y+1))$ を示せば十分。まず Kaye [1] 補題 5.8 を使って $M \models \forall u < y((s')_u = (s)_u) \land (s')_y = 0$ を満たすように $s' \in M$ を構成すると、明らかに $M \models \forall x(\chi(x,y,s) \leftrightarrow \chi(x,y,s'))$ であるので

$$M \models \forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s) \land \theta(z,u)) \leftrightarrow \mathsf{Q}z(\chi(z,u,s') \land \theta(z,u)))$$

が成り立つ。したがって $M \models \forall u < y(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s') \land \theta(z,u)) \leftrightarrow (s')_u = 0)$ 。いま $M \models \mathsf{Q}z(\chi(z,y,s') \land \theta(z,y)) \leftrightarrow (s')_y = 0$ であるので、合わせて

$$M \models \forall u < y+1(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s') \land \theta(z,u)) \leftrightarrow (s')_u = 0)$$

を得る。いま任意に $x \in M \models \chi(x,y,s) \land \theta(x,y)$ をとると、

$$\begin{aligned} M \models \chi(x,y,s) \land \theta(x,y) &\Rightarrow M \models \chi(x,y,s') \land \theta(x,y) \\ &\Rightarrow M \models \chi(x,y,s') \land (\theta(x,y) \leftrightarrow (s')_y = 0) \\ &\Rightarrow M \models \chi(x,y+1,s') \end{aligned}$$

であるので、以上から

$$M \models \forall u < y+1(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s') \land \theta(z,u)) \leftrightarrow (s')_u = 0) \land \chi(x,y+1,s')$$

すなわち $M \models \delta(x,y+1)$ が導かれたので、$M \models \mathsf{Q}x\delta(x,y+1)$ が成り立つ。

Case2: $M \not\models \mathsf{Q}x(\delta(x,y) \land \theta(x,y)$ のとき。

Subclaim2.2 より $M \models \mathsf{Q}x(\delta(x,y) \land \neg\theta(x,y)$ であり、これは Subclaim2.1 より $M \models \mathsf{Q}x(\chi(x,y,s) \land \neg\theta(x,y)$ と同値である。したがって $M \models \forall x(\chi(x,y,s) \land \neg\theta(x,y) \to \delta(x,y))$ を示せば十分であり、$M \models \forall u < y((s')_u = (s)_u) \land (s')_y = 1$ を満たすように $s' \in M$ を構成すれば後は Case1 と全く同様にこの s' によって $M \models \delta(x,y+1)$ だと分かり $M \models \mathsf{Q}x\delta(x,y+1)$ が結論できる。

したがって以上から $M \models \mathsf{Q}x\delta(x,0) \land \forall y(\mathsf{Q}x\delta(x,y) \to \mathsf{Q}x\delta(x,y+1))$ が成り立つことが確認できたので $M \models \forall y \mathsf{Q}x\delta(x,y)$ が結論できた。Claim2 の証明終わり。

次に” x は $y+1$ 番目に$\delta(x,y)$ を満たす元”を意味する論理式 $\gamma(x,y)$ が以下で定まる。

$$\begin{aligned}&\exists w[\forall v<(w)_0\neg\delta(v,y)\wedge\delta((w)_0,y)\wedge x=(w)_y\wedge\\&\quad\forall u<y(\delta((w)_{u+1},y)\wedge(w)_u<(w)_{u+1}\wedge\forall v<(w)_{u+1}((w)_u<v\to\neg\delta(v,y)))]\end{aligned}$$

<u>Claim3:</u> $M\models\forall y\exists!x\gamma(x,y)$

$y\neq 0$ の場合、”$M\models\delta(x,y)$ を満たす $y+1$ 番目の元 x”は Claim2 によって必ず存在し、明らかに一意である。$y=0$ も同様に、$M\models\delta(x,0)$ を満たす最小の x がただひとつの $M\models\gamma(x,0)$ を満たす元である。Claim3 の証明終わり。

$\psi(x)=\exists y\gamma(x,y)$ とおく。以下ではこの ψ が補題の条件 $(a),(b),(c)$ を満たすことを確認する。

<u>Claim4:</u> ψ は補題の条件 (a) を満たす。すなわち $M\models\mathsf{Q}x\exists y\gamma(x,y)$ が成り立つ。

任意に $z\in M$ をとる。このとき Claim3 より $M\models\gamma(x,z)$ を満たすただひとつの x が存在し、x は $M\models\delta(x,z)$ を満たす $z+1$ 番目の元なので $x\geq z$ である。ゆえに $M\models\forall z\exists x\geq z\gamma(x,z)$ すなわち $M\models\forall z\exists x\geq z\exists y\gamma(x,y)$ が成り立つ。

<u>Cliam5:</u> ψ は補題の条件 (b) を満たす。すなわち $M\models\forall x(\exists y\gamma(x,y)\to\varphi(x))$ が成り立つ。

任意に $x\in M\models\exists y\gamma(x,y)$ をとると、ある y で $M\models\gamma(x,y)$ となり

$$\begin{aligned}M\models\gamma(x,y)&\Rightarrow M\models\delta(x,y)\\&\Rightarrow \text{ある } s\in M \text{ で } M\models\chi(x,y,s)\\&\Rightarrow M\models\varphi(x)\end{aligned}$$

が成り立つ。

<u>Cliam6:</u> ψ は補題の条件 (c) を満たす。

任意に $a\in M$ を取ると、このとき Claim3 より $M\models\gamma(y,a)$ を満たす y がただひとつ存在する。

<u>Subclaim6.1:</u> $M\models\forall x(x>y\wedge\exists w\gamma(x,w)\to\exists w>a\gamma(x,w))$

$x\in M\models x>y\wedge\exists w\gamma(x,w)$ を任意にとり、$w\leq a$ なる w で $M\models\gamma(x,w)$ を満たすものが存在したと仮定して矛盾を導けば十分。いま x は $\delta(x,w)$ を満たす $w+1$ 番目の元であり、y は $\delta(y,a)$ を満たす $a+1$ 番目の元であるのだが、δ の定義から $M\models\forall z(\delta(z,a)\to\delta(z,w))$ が成り立つので $x\leq y$ が導かれて矛盾する。Subclaim6.1 の証明終わり。

Claim1 より $(s)_u(0\leq u\leq a)$ の値が 0 かそうでないかに関して一意的に以下を満たす s がとれる。

$$M\models\forall u\leq a(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s)\wedge\theta(z,u))\leftrightarrow(s)_u=0)$$

ここで任意に $x\in M\models x>y\wedge\exists w\gamma(x,w)$ をとると、Subclaim6.1 よりある $w>a$ で $M\models\gamma(x,w)$ が成り立つ。γ の定義より $M\models\delta(x,w)$ であるので、ある $s'\in M$ で以下が成り立つ。

$$M\models\forall u<w(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s')\wedge\theta(z,u))\leftrightarrow(s')_u=0)\wedge\chi(x,w,s')$$

いま $a<w$ なので特に $M\models\forall u\leq a(\mathsf{Q}z(\chi(z,u,s')\wedge\theta(z,u))\leftrightarrow(s')_u=0)$ であるから、Claim1(ii) より $M\models(s)_a=0\leftrightarrow(s')_a=0$ である。また $M\models\chi(x,w,s')$ より $M\models\forall i<$

$w((s')_i = 0 \leftrightarrow \theta(x,i))$ であるので、特に i を a として $M \models (s')_a = 0 \leftrightarrow \theta(x,a)$ を得る。したがって

$$M \models (s)_a = 0 \leftrightarrow \theta(x,a)$$

が成り立つ。ゆえに $M \models x > y \wedge \exists w \gamma(x,w)$ を満たす x については、$\theta(x,a)$ の真偽は x に依存せず、$(s)_a$ の値で確定している。

$\square$

参考文献

[1] Richard Kaye, “Models of Peano Arithmetic” ,（Oxford logic guides, 15）（Oxford science publications）Clarendon Press , Oxford University Press,1991.