一階算術における言語の追加について

橋本航気

2022 年 2 月 19 日

概要

議論を明快にする目的で既製の関数や関係を組み合わせて別の関数を定義するというのは普通の数学でよく行われることであるが，ここではその「既製の関数や関係を組み合わせて別の関数を定義する」という手続きを定義し，どのような関数・関係による新たな記号の追加なら論理式の算術的階層を変えないのかについて考察する．

目次

1 前提知識

Kaye [1] の 2 章，3.1 節，4.1 節を既に読んでいる読者を想定しているが，この記事を読み通すためには以下を知っていれば十分である．

定義 1.1. 一階算術のための言語 $\mathscr{L}_A$ とは，非論理記号として以下をもつものと定める．

関数記号　$+, \cdot;$
関係記号　$<;$
定数記号　$0, 1;$

ただしここで $+, \cdot$ は 2 変数関数記号，$<$ は二項関係記号である．

定理 1.2 (同型定理)**.** $h : M \to N$ が同型写像ならば，任意の論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ と任意の $a_1, ..., a_n \in M$ に対して以下が成り立つ．

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow N \models \varphi(h(a_1), ..., h(a_n))$$

証明. 論理記号 ($\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\forall$, $\exists$) の数 k による帰納法． $\square$

定義 1.3. いくつかの略記を導入する．以下の表では t は x を含まない言語 $\mathscr{L}_A$ の項である．こ

略記	正式
$\forall x < t(...)$	$\forall x(x < t \to ...)$
$\forall x \leq t(...)$	$\forall x(x \leq t \to ...)$
$\exists x < t(...)$	$\exists x(x < t \land ...)$
$\exists x \leq t(...)$	$\exists x(x \leq t \land ...)$

の上の表に現れるような量化子のことを有界な量化子という．次に $\mathscr{L}_A$ 論理式が Δ_0 であるとは，論理式その論理式に含まれる量化子がすべて有界であることをいう．

定義 1.4. ある論理式が Σ_{n+1} であるとは，それが $\varphi \in \Pi_n$ によって $\exists \overline{x}\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ の形をしていることと定義する．ある論理式が Π_{n+1} であるとは，それが $\varphi \in \Sigma_n$ によって $\forall \overline{x}\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ の形をしていることと定義する．

この定義から，ある論理式が Σ_n であるとは，それが次のような形をしていること同値である．

$$\exists \overline{x}_1 \forall \overline{x}_2 \exists \overline{x}_3 ... Q\overline{x}_n \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$$

ただしここで φ に含まれるすべての量化は有界であり，Q は n が奇数なら $\exists$，偶数なら $\forall$ である．同様に，ある論理式が Π_n であるとは，それが次のような形をしていること同値である．

$$\forall \overline{x}_1 \exists \overline{x}_2 \forall \overline{x}_3 ... Q\overline{x}_n \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{y})$$

ただしここで φ に含まれるすべての量化は有界であり，Q は n が奇数なら $\forall$，偶数なら $\exists$ である．ここで量化のひとかたまりが空であることも許容する．そのため，例えば任意の Π_n 論理式は自動的に Π_{n+1} であり Σ_{n+1} でもある．また，ある論理式 $\theta(\overline{x})$ が，考えているモデル M や理論 T で，ある Σ_n（もしくは Π_n）論理式 $\varphi(\overline{x})$ と同値であるならば，すなわち

$$T \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}))$$

もしくは

$$M \models \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}))$$

であるならば，その論理式 $\theta(\overline{x})$ は Σ_n（もしくは Π_n）であるという．あるモデルで同値なのか，はたまたある理論で同値なのかを区別することが重要であるときは，とくに $\Sigma_n(T), \Pi_n(T), \Sigma_n(M), \Pi_n(M)$ と表記することによって区別を付ける．

定義 1.5. ある論理式が Δ_n であるとは，それがある Π_n 論理式と Σ_n 論理式の両方と同値であることと定義する．

前と同様に，これらの同値がある固定したモデルでなのか，理論でなのかを指し示すために，必要ならば $\Delta_n(T), \Delta_n(M)$ と表記する．

以上で定めた論理式のクラスたちには $\Sigma_n \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \Pi_{n+1}$，$\Pi_n \subseteq \Delta_{n+1} \subseteq \Sigma_{n+1}$ という明らかな含意関係がある．この論理式のクラス $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$ たちの（含意関係による）階層構造を算術的階層という．

定義 1.6. PA^- とは以下の 15 個の $\mathscr{L}_A$ 文の集合からなる理論である．

Ax1　$\forall x \forall y \forall z((x+y)+z = x+(y+z))$

Ax2　$\forall x \forall y(x+y = y+x)$

Ax3　$\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

Ax4　$\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

Ax5　$\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z)$

Ax6　$\forall x((x+0 = x) \land (x \cdot 0 = 0))$

Ax7　$\forall x(x \cdot 1 = x)$

Ax8　$\forall x \forall y \forall z((x < y \land y < z) \to x < z)$

Ax9　$\forall x(\neg(x < x))$

Ax10　$\forall x \forall y(x < y \ \lor \ x = y \ \lor \ y < x)$

Ax11　$\forall x \forall y \forall z(x < y \to x+z < y+z)$

Ax12　$\forall x \forall y \forall z(0 < z \land x < y \to x \cdot z < y \cdot z)$

Ax13　$\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x+z = y))$

Ax14　$0 < 1 \land \forall x(x > 0 \to x \geq 1)$

Ax15　$\forall x(x \geq 0)$

定理 1.7. PA^- は Σ_1 完全である．すなわち，任意の $\mathscr{L}_A$ の Σ_1 文 σ について

$$PA^- \vdash \sigma \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \sigma$$

が成り立つ．

定理 1.8. $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ を $\mathbb{N}$ 上の部分関数とする．このとき，f が再帰的であることと，

$$f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi(\overline{x}, y)$$

が全ての $\overline{x}, y \in \mathbb{N}$ で成り立つような $\mathscr{L}_A$ の Σ_1 論理式 φ が存在することは同値である．

定義 1.9. $\mathscr{L}_A$ 論理式 $\varphi(x, \overline{y})$ に関して，下記のような形の論理式にそれぞれ名前を付ける．

帰納法公理	$\forall \overline{y}(\varphi(0, \overline{y}) \land \forall x(\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(x+1, \overline{y})) \to \forall x \varphi(x, \overline{y}))$	(1.1)
z までの帰納法公理	$\forall \overline{y}, z(\varphi(0, \overline{y}) \land \forall x < z(\varphi(x, \overline{y}) \to \varphi(x+1, \overline{y})) \to \forall x \leq z \varphi(x, \overline{y}))$	(1.2)
最小値原理	$\forall \overline{y}(\exists x \varphi(x, \overline{y}) \to \exists z(\varphi(z, \overline{y}) \land \forall w < z \neg \varphi(w, \overline{y})))$	(1.3)
累積帰納法公理	$\forall \overline{y}(\forall z((\forall w < z \varphi(w, \overline{y})) \to \varphi(z, \overline{y})) \to \forall x \varphi(x, \overline{y}))$	(1.4)

ここで式 (1.1) の論理式を $I_x\varphi$，式 (1.2) の論理式を $U_x\varphi$，式 (1.3) の論理式を $L_x\varphi$，式 (1.4) の論理式を $T_x\varphi$ と表記する[*1]．ただし，帰納法変数が明らかなときは下付きの $_x$ を省略する．またそれぞれの論理式先頭の $\overline{y}$ はパラメーターとよばれる．

定義 1.10. 以下の $\mathscr{L}_A$ 理論を PA と定める．

$$PA^- \cup \{\, I_x\varphi \mid \varphi(x,\overline{y}) \text{ は } \mathscr{L}_A\text{論理式} \,\}$$

定義 1.11. $\mathscr{L}_A$ 論理式 $\varphi(x,\overline{y},\overline{z})$ に関して，下記の形の論理式を φ の採集公理とよび，$B_{x,\overline{y}}\varphi$ と表記する．

$$\forall\overline{z},t(\forall x<t\exists\overline{y}\varphi(x,\overline{y},\overline{z})\to\exists s\forall x<t\exists\overline{y}<s\varphi(x,\overline{y},\overline{z}))$$

混乱が生じない限り下付きの $_{x,\overline{y}}$ を省略し，$B\varphi$ と表記する．

定義 1.12. 以下の $\mathscr{L}_A$ 理論を Coll と定める．

$$PA^- \cup \{\, B_x\varphi \mid \varphi(x,\overline{y}) \text{ は } \mathscr{L}_A\text{論理式} \,\}$$

注 1.13. $B\varphi$ の'逆',

$$\forall\overline{z},t(\exists s\forall x<t\exists\overline{y}<s\varphi(x,\overline{y},\overline{z}))\to\forall x<t\exists\overline{y}\varphi(x,\overline{y},\overline{z}))$$

はすべての $\mathscr{L}_A$ 構造で成り立つ．

定義 1.14. 各 $n\geq 0$ に対し，以下のように $\mathscr{L}_A$ 理論を定める[*2]．

$$\begin{aligned}
I\Delta_0 &:= PA^- \cup \{\, I_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{の}\Delta_0\text{論理式} \,\}\\
I\Sigma_n &:= PA^- \cup \{\, I_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{の}\Sigma_n\text{論理式} \,\}\\
I\Pi_n &:= PA^- \cup \{\, I_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{の}\Pi_n\text{論理式} \,\}\\
L\Sigma_n &:= PA^- \cup \{\, L_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{の}\Sigma_n\text{論理式} \,\}\\
L\Pi_n &:= PA^- \cup \{\, L_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{の}\Pi_n\text{論理式} \,\}\\
\mathrm{Coll}_n &:= PA^- \cup \{\, B_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{の}\Sigma_n\text{論理式} \,\}\\
B\Sigma_n &:= I\Delta_0 \cup \{\, B_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{の}\Sigma_n\text{論理式} \,\}\\
B\Pi_n &:= I\Delta_0 \cup \{\, B_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L}_A\text{の}\Pi_n\text{論理式} \,\}
\end{aligned}$$

定義から $I\Sigma_0=I\Delta_0=I\Pi_0$，$B\Sigma_n=I\Delta_0\cup\mathrm{Coll}_n$，$PA=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}I\Sigma_n=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}I\Pi_n$，$\mathrm{Coll}=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Coll}_n$ である．

[*1] 記号の由来はそれぞれの英語にある．帰納法は Induction，z までの帰納法は Induction up to z，最小値原理は Least number principle，累積帰納法は Total induction の訳である．

[*2] この定義において「φ は $\mathscr{L}_A$ の Γ 論理式」といったとき，φ は厳密に Γ の形をしていると考えてよい．考えている構造や理論上で Γ と見なせるものについては，厳密な形の方から従うからである．たとえば $M\models I\Sigma_n$ で $\varphi(x,\overline{y})$ が $\Sigma_n(M)$ なら，ある Σ_n 論理式（これは厳密にその形をしている）$\psi(x,\overline{y})$ によって

$$M\models\forall x,\overline{y}(\varphi(x,\overline{y})\leftrightarrow\psi(x,\overline{y}))$$

となり，ψ に関する帰納法公理 I_ψ によって $M\models I_\varphi$ も成り立つ．

命題 1.15. $PA^- \cup \{ I_x\varphi \mid \varphi(x,\overline{y})$ は $\mathscr{L}_A$論理式$\} \vdash \{ U_x\varphi \mid \varphi(x,\overline{y})$ は $\mathscr{L}_A$論理式$\}$

証明. M を $PA^- \cup \{ I_x\varphi \mid \varphi(x,\overline{y})$ は $\mathscr{L}_A$論理式$\}$ の任意のモデルとする．任意にとった $\mathscr{L}_A$ 論理式 $\varphi(x,\overline{y})$ に対し，

$$M \models \forall \overline{y}, z(\varphi(0,\overline{y}) \wedge \forall x < z(\varphi(x,\overline{y}) \to \varphi(x+1,\overline{y})) \to \forall x \leq z\varphi(x,\overline{y}))$$

を示せば完全性定理から結論が得られる．まず任意に $\overline{a}, b \in M$ をとり，

$$M \models \varphi(0,\overline{a}) \wedge \forall x < b(\varphi(x,\overline{a}) \to \varphi(x+1,\overline{a})) \tag{1.5}$$

を仮定する．このとき $M \models \forall x \leq b\varphi(x,\overline{a})$ を示せば十分．ここで新たに $\mathscr{L}_A$ 論理式 ψ を以下で定める．

$$\psi(x,\overline{y},z) := (x \leq z \wedge \varphi(x,\overline{y})) \vee x > z$$

Claim $M \models \forall x\psi(x,\overline{a},b)$

まず式 (1.5) より $M \models 0 \leq b \wedge \varphi(0,\overline{a})$ であるので $M \models \psi(0,\overline{a},b)$ である．任意に $c \in M$ をとり $M \models \psi(c,\overline{a},b)$ と仮定する．まず $c+1 > b$ なら明らかに $M \models \psi(c+1,\overline{a},b)$ であるので $c+1 \leq b$ としてよい．このとき $M \models c < b$ であるから，仮定 $M \models \psi(c,\overline{a},b)$ より $M \models \varphi(c,\overline{a})$ である．したがって式 (1.5) より $M \models \varphi(c+1,\overline{a})$ となるので $M \models \psi(c+1,\overline{a},b)$ が成り立つ．以上より $M \models I_x\psi$ と合わせて $M \models \forall x\psi(x,\overline{a},b)$ が結論できる．Claim の証明終わり．

したがって任意の $M \ni x \leq b$ については $M \models \neg x > b$ であるから $M \models \forall x \leq b\varphi(x,\overline{a},b)$ が成り立つ．

□

続く二つの命題は Kaye[1] の命題 7.1 と 7.2 である．

命題 1.16. $n \in \mathbb{N}$ とし，$\theta(x,\overline{y})$ を $\mathscr{L}_A$のΣ_n 論理式，$\psi(x,\overline{y})$ を $\mathscr{L}_A$ の Π_n 論理式とし，$t(\overline{y})$ を $\mathscr{L}_A$ の項とする．このとき，論理式 $\forall x < t(\overline{y})\theta(x,\overline{y})$ と $\exists x < t(\overline{y})\psi(x,\overline{y})$ はそれぞれ $\Sigma_n(\mathrm{Coll}_n)$, $\Pi_n(\mathrm{Coll}_n)$ である．したがって論理式のクラス $\Sigma_n(\mathrm{Coll}_n)$, $\Pi_n(\mathrm{Coll}_n)$, $\Delta_n(\mathrm{Coll}_n)$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ で有界量化に閉じる．

証明. n に関する帰納法で示す．$n = 0$ なら $\Sigma_0 = \Delta_0 = \Pi_0$ なので明らか．$n - 1 \geq 0$ で成り立つと仮定する．証明においては影響がないので以下項 $t(\overline{y})$ は単に t と表記する．Σ_n 論理式 $\theta(x,\overline{y})$ は Π_{n-1} 論理式 $\varphi(x,\overline{y},\overline{z})$ によって

$$\theta(x,\overline{y}) = \exists\overline{z}\varphi(x,\overline{y},\overline{z})$$

と書ける．このとき $B_{x,\overline{y}}\varphi$ から

$$\mathrm{Coll_n} \vdash \forall\overline{y}, t(\forall x < t \underbrace{\theta(x,\overline{y})}_{\exists\overline{z}\varphi(x,\overline{y},\overline{z})} \leftrightarrow \exists s\forall x < t\exists\overline{z} < s\varphi(x,\overline{y},\overline{z}))$$

である．さらに帰納法の仮定から $\exists \overline{z} < s\varphi(x,\overline{y},\overline{z})$ は $\Pi_{n-1}(\mathrm{Coll_{n-1}})$ であるので，ある Π_{n-1} 論理式 $\chi(x,\overline{y},s)$ によって

$$\mathrm{Coll_{n-1}} \vdash \forall x,\overline{y},s(\chi(x,\overline{y},s) \leftrightarrow \exists \overline{z} < s\varphi(x,\overline{y},\overline{z}))$$

となっている．したがって

$$\mathrm{Coll_n} \vdash \forall \overline{y},t(\forall x < t\theta(x,\overline{y}) \leftrightarrow \exists s \forall x < t\chi(x,\overline{y},s))$$

が成り立ち，ここで $\exists s\forall x(x < t \to \chi(x,\overline{y},s))$ は Σ_n 論理式である．以上から $\forall x < t\theta(x,\overline{y})$ は $\Sigma_n(\mathrm{Coll}_n)$ である．$\Pi_n(\mathrm{Coll}_n)$ が存在有界量化に閉じることの帰納法ステップの証明も全く同様．□

命題 1.17. $n \geq 1$ について $I\Sigma_n \vdash \mathrm{Coll}_n$ が成り立つ．したがって特に $PA \vdash \mathrm{Coll}$ である．

証明. n に関する帰納法で示す．

Base: $I\Sigma_1 \vdash \mathrm{Coll}_1$

$M \models I\Sigma_1$ とし，任意にとった Σ_1 論理式 $\varphi(x,\overline{y},\overline{z})$ と $\overline{a},t \in M$ について

$$M \models \forall x < t\exists \overline{y}\varphi(x,\overline{y},\overline{a}) \tag{1.6}$$

と仮定する．$\varphi(x,\overline{y},\overline{z})$ は Σ_1 であるので，ある Δ_0 論理式 θ によって $\varphi(x,\overline{y},\overline{z}) = \exists \overline{w}\theta(x,\overline{y},\overline{z},\overline{w})$ と書ける．するといま

$$M \models \exists s\forall x < t\exists \overline{y},\overline{w} < s\theta(x,\overline{y},\overline{a},\overline{w})$$

を[*3]示せば十分である．ここで $\psi(u,\overline{a})$ を次の Σ_1 論理式とする．

$$\exists s\forall x < u\exists \overline{y},\overline{w} < s\theta(x,\overline{y},\overline{a},\overline{w})$$

すると $M \models \psi(t,\overline{a})$ を示せば良いことがわかる．命題 1.15 の証明から，$I\Sigma_n$ は Σ_n 論理式の高々帰納法を含意するので $M \models \psi(0,\overline{a}) \wedge \forall u < t(\psi(u,\overline{a}) \to \psi(u+1,\overline{a}))$ を示す．まず $\psi(0,\overline{a})$ は明らか．次に $u < t$ について $\psi(u,\overline{(a)})$ を仮定すると，ある s_u で $M \models \forall x < u\exists \overline{y},\overline{w} < s_u\theta(x,\overline{y},\overline{a},\overline{w})$ となる．いまこの u は t 未満なので，仮定 (1.6) によって $M \models \theta(u,\overline{y}_u,\overline{a},\overline{w}_u)$ を満たす $\overline{y}_u,\overline{w}_u \in M$ が存在する．ここで $s_{u+1} := \max(\overline{y}_u,\overline{w}_u,s_u)+1$ とおけば

$$M \models \forall x < u+1\exists \overline{y},\overline{w} < s_{u+1}\theta(x,\overline{y},\overline{a},\overline{w})$$

が成り立つので ψ に関する帰納法が完了した．

induction: $I\Sigma_n \vdash \mathrm{Coll}_n \Rightarrow I\Sigma_{n+1} \vdash \mathrm{Coll}_{n+1}$ $(n \geq 1)$

$M \models I\Sigma_{n+1}$ とし，任意にとった Σ_{n+1} 論理式 $\varphi(x,\overline{y},\overline{z})$ と $\overline{a},t \in M$ について

$$M \models \forall x < t\exists \overline{y}\varphi(x,\overline{y},\overline{a}) \tag{1.7}$$

[*3] $\exists \overline{y},\overline{w} < s$ では $\overline{y},\overline{w}$ の全てが s で押さえられてる．もし $\overline{w}$ だけを押さえたい場合は $\exists \overline{y}\exists \overline{w} < s$ と書くことになる．

と仮定する．$\varphi(x,\overline{y},\overline{z})$ は Σ_{n+1} であるので，ある Π_n 論理式 θ によって $\varphi(x,\overline{y},\overline{z}) = \exists\overline{w}\theta(x,\overline{y},\overline{z},\overline{w})$ と書けて，

$$M \models \exists s\forall x < t\exists\overline{y},\overline{w} < s\theta(x,\overline{y},\overline{a},\overline{w})$$

を示せば十分である．ここで $\psi(u,\overline{a})$ を次の論理式とする．

$$\exists s\forall x < u\exists\overline{y},\overline{w} < s\theta(x,\overline{y},\overline{a},\overline{w})$$

帰納法の仮定から $I\Sigma_{n+1} \vdash \mathrm{Coll}_n$ であるので，この ψ は命題 1.16 から $\Sigma_{n+1}(I\Sigma_{n+1})$ だと分かる．したがって ψ に関する帰納法公理が使えることになる．以降の証明は Base と全く同様である． □

2 算術的階層を変えない関数記号および関係記号の導入方法

定義 2.1. $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，T を $\mathscr{L}$ の理論とする．$T \vdash \forall\overline{x}\exists!y\varphi(\overline{x},y)$ を満たす $\mathscr{L}$ 論理式 φ に応じて新しい関数記号 f を用意し，$\forall\overline{x}\forall y(\varphi(\overline{x},y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y)$ を理論 T に付け加えて得られる理論を T の定義による拡張という（この新しい理論の言語は $\mathscr{L} \cup \{f\}$）．ここで $\forall\overline{x}\forall y(\varphi(\overline{x},y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y)$ のことを f の定義公理とよび，f は φ によって定義されるという．また，$\mathscr{L}$ 論理式 $\psi(\overline{x})$ について新しい関係記号 R を用意し，$\forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x}))$ を理論 T に付け加えて得られる理論も T の定義による拡張という．同様に $\forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x}))$ のことを R の定義公理とよび，R は ψ によって定義されるという．

定義 2.2. $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}'$ を一階の言語とし，T を $\mathscr{L}$ の理論，T' を $\mathscr{L}'$ の理論とする．ここで T' が T の保存的拡大であるとは，任意の $\mathscr{L}$ 文 σ について以下が成り立つことをいう．

$$T \vdash \sigma \Leftrightarrow T' \vdash \sigma$$

定義による拡張によって得られる理論は元の理論の保存的拡大になる．

命題 2.3. $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，T を $\mathscr{L}$ の理論とする．言語 $\mathscr{L} \cup \{f\}$ の理論 T'，言語 $\mathscr{L} \cup \{R\}$ の理論 T'' がそれぞれ T の定義による拡張であるとき，T' と T'' は T の保存的拡大になる．

証明. $T \subseteq T'$ より $\mathscr{L}$ 文 σ について $T \vdash \sigma \Rightarrow T' \vdash \sigma$ は明らか．逆も完全性定理より簡単に確認できる． □

補題 2.4. $\mathscr{L}$ を $\mathscr{L}_A$ を含む一階の言語，T を $\mathscr{L}$ の理論とする．いま $T \vdash \forall\overline{x}\exists!y\varphi(\overline{x},y)$ となる $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 φ が存在したとする．このとき，新しい関数記号 f を追加して言語 $\mathscr{L}'(= \mathscr{L} \cup \{f\})$ を得る．そして言語 $\mathscr{L}'$ の理論 T' を以下のように定める．

$$T' = T \cup \{\forall\overline{x},y(\varphi(\overline{x},y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y)\}$$

このとき，$\mathscr{L}'$ の各原子論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}$ の（つまり f を含まない）Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する．

$$T' \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

証明． そもそも $\theta(\overline{x})$ が新しい関数記号 f を含まない論理式なら $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) = \theta^{\Pi_1}(\overline{x}) = \theta(\overline{x})$ とすればよいので，そうでないとする．

まず $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ を構成しよう．$\theta(\overline{x})$ は原子論理式なので，n 項関係記号 $R(\in \mathscr{L})$ と $\mathscr{L}'$ の項 $t_1(\overline{x}), ..., t_n(\overline{x})$ によって $R(t_1(\overline{x}), ..., t_n(\overline{x}))$ と書ける．すると明らかに $R(t_1(\overline{x}), ..., t_n(\overline{x}))$ は次と T' 上で同値．

$$\exists y_1, ..., y_n(y_1 = t_1(\overline{x}) \wedge \cdots \wedge y_n = t_n(\overline{x}) \wedge R(y_1, ..., y_n)) \tag{2.1}$$

次に，各 i について $y_i = t_i(\overline{x})$ を f を含まない Σ_1 論理式に変形する再帰的論理式変形操作 F^Σ を以下で定義する．

<u>base:</u> $y = t(\overline{x})$ が f を含まないなら，$F^\Sigma(y = t(\overline{x}))$ は $y = t(\overline{x})$ とする．
<u>recursion:</u> $y = t(\overline{x})$ が f を含むとする．まず以下のように項の木 U を構成する．
項 $t(\overline{x})$ は $\mathscr{L}'$ の m 変数関数記号 g_0 と項 $s_1(\overline{x}), ..., s_m(\overline{x})$ によって

$$g_0(s_1(\overline{x}), ..., s_m(\overline{x}))$$

と書けて，これを根ノードとする．次に，各 $s_i(\overline{x}), ..., s_m(\overline{x})$ をその子ノードとする．$s_i(\overline{x})$ が $\mathscr{L}'$ の k 変数関数記号 g_1 と項 $u_1(\overline{x}), ..., u_k(\overline{x})$ によって

$$s_i(\overline{x}) \equiv g_1(u_1(\overline{x}), ..., u_k(\overline{x}))$$

と書ければ，各 $u_j(\overline{x})$ を $s_i(\overline{x})$ の子とする．そうでなく $s_i(\overline{x})$ が変数や定数なら子を持たないとする（つまり $s_1(\overline{x})$ は葉になる）．この操作を続けていくことで葉が定数もしくは変数となり，葉でないノードは一つ以上の関数記号を含む項となるような木 U が得られる．
次に，一番外側の関数記号が f である項のノードを探索対象として設定し，木 U に横型探索を実行する．そして探索対象が見つかる順にそのノードに自然数を昇順で割り当てる．ふられた番号がもっとも大きい（横型探索によって最後にみつかる）ノード N を $f(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}))$ とおく．その N の先祖ノード[a]すべてにおける $f(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}))$ をこれまで使われていない変数 z で置き換え，N を根とする U の部分木も z で置き換えることによって新たに木 U' を得る．その U' の根ノードの項を $t'(\overline{x}, z)$ とおき，

$$F^\Sigma(y = t(\overline{x})) \text{ を } \exists z(F^\Sigma(y = t'(\overline{x}, z)) \wedge \varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z)) \tag{2.2}$$

と定める．

[a] N の親と N の親の親，N の親の親の親，$\cdots$ を指す

Claim: 任意の $\mathscr{L}'$ の項 $t(\overline{x})$ に対し，$F^{\Sigma}(y = t(\overline{x}))$ は $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式であり，さらに

$$T' \vdash \forall \overline{x}, y(y = t(\overline{x}) \leftrightarrow F^{\Sigma}(y = t(\overline{x})))$$

これを項 $t(\overline{x})$ に含まれる f の数による帰納法で示す．まず一つも含まれないなら明らか．次に f が $t(\overline{x})$ に $k+1$ 個含まれているとすると，F^{Σ} の定義よりある論理式 $y = t'(\overline{x}, z)$ によって $F^{\Sigma}(y = t(\overline{x}))$ は

$$\exists z(F^{\Sigma}(y = t'(\overline{x}, z)) \land \varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z))$$

となるが，この論理式中の $y = t'(\overline{x}, z)$ に含まれる f の数は k 個であるので，帰納法の仮定から $F^{\Sigma}(y = t'(\overline{x}, z))$ は $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式であり，また F^{Σ} の定義より $\varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z)$ の中には一つも f は出現しないので $F^{\Sigma}(y = t(\overline{x}))$ が $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式になることはよい．同値性は以下（$T' \vdash$ や自由変数の量化は省略してある）．

$$\begin{aligned}
y = t(\overline{x}) &\leftrightarrow \exists z(y = t'(\overline{x}, z) \land z = f(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}))) \\
&\leftrightarrow \exists z(y = t'(\overline{x}, z) \land \varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z)) \\
&\leftrightarrow \exists z(F^{\Sigma}(y = t'(\overline{x}, z)) \land \varphi(v_1(\overline{x}), ..., v_n(\overline{x}), z)) && (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&\leftrightarrow F^{\Sigma}(y = t(\overline{x}))
\end{aligned}$$

以上から，$\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ は

$$\exists y_1, ..., y_n(F^{\Sigma}(y_1 = t_1(\overline{x})) \land \cdots \land F^{\Sigma}(y_n = t_n(\overline{x})) \land R(y_1, ..., y_n)) \tag{2.3}$$

と定義すればよいことがわかる．

次に $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ について考える．明らかに $\theta(\overline{x}) \equiv R(t_1(\overline{x}), ..., t_n(\overline{x}))$ は次と T' 上で同値．

$$\forall y_1, ..., y_n((y_1 = t_1(\overline{x}) \land \cdots \land y_n = t_n(\overline{x})) \to R(y_1, ..., y_n)) \tag{2.4}$$

したがって Claim より $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ は

$$\forall y_1, ..., y_n((F^{\Sigma}(y_1 = t_1(\overline{x})) \land \cdots \land F^{\Sigma}(y_n = t_n(\overline{x}))) \to R(y_1, ..., y_n)) \tag{2.5}$$

と定義すればよいことがわかる． □

次に先の補題 2.4 を Δ_0 論理式まで拡張したいのだが，補題の素朴なアナロジーでは有界量化の中に非有界量化が出てくるために失敗する．この問題は理論にある一定の条件を課すことで解決を試みる．その条件とはある程度の採集公理を含意することであるのだが，$\mathscr{L}_A$ にしか採集公理を定義していなかったのでここで新ためて $\mathscr{L}_A$ を拡張した言語の論理式に関する採集公理を定義する．

定義 2.5. $\mathscr{L}$ を $\mathscr{L}_A$ を含む言語とし，$\varphi(x, \overline{y}, \overline{z})$ を $\mathscr{L}$ 論理式とする．ここで φ の採集公理 $B_{x,\overline{y}}\varphi$ とは，以下の文を指す．

$$\forall \overline{z}, t(\forall x < t \exists \overline{y} \varphi(x, \overline{y}, \overline{z}) \to \exists s \forall x < t \exists \overline{y} < s \varphi(x, \overline{y}, \overline{z}))$$

混乱が生じない限り $B_{x,\overline{y}}\varphi$ を単に $B\varphi$ と表記する．そして次の $\mathscr{L}$ の理論を $\mathrm{Coll}(\mathscr{L})$ とよぶ．

$$PA^- + \{B\varphi | \varphi \text{ は } \mathscr{L} \text{ 論理式 }\}$$

$\mathrm{Coll}(\mathscr{L})$ の論理式の階層を Σ_n に制限して得られる以下の理論を $\mathrm{Coll}_n(\mathscr{L})$ と表記する．

$$PA^- + \{B\varphi | \varphi \text{ は } \mathscr{L} \text{ の} \Sigma_n \text{論理式}^{*4}\}$$

言語が文脈から明らかな場合は $\mathrm{Coll}(\mathscr{L})$ を単に Coll とかく．$\mathscr{L}_A$ の場合と全く同様に以下が成り立つ（cf. Kaye [1] 命題 7.1）．

命題 2.6. $\mathscr{L}$ を $\mathscr{L}_A$ を含む言語とする．$n \in \mathbb{N}$ とし，$\theta(x,\overline{y})$ を $\mathscr{L}$ のΣ_n 論理式，$\psi(x,\overline{y})$ を $\mathscr{L}$ の Π_n 論理式とし，$t(\overline{y})$ を $\mathscr{L}$ の項とする．このとき，論理式 $\forall x < t(\overline{y})\theta(x,\overline{y})$ と $\exists x < t(\overline{y})\psi(x,\overline{y})$ はそれぞれ $\Sigma_n(\mathrm{Coll}_n(\mathscr{L}))$，$\Pi_n(\mathrm{Coll}_n(\mathscr{L}))$ である．したがって $\Sigma_n(\mathrm{Coll}_n(\mathscr{L}))$，$\Pi_n(\mathrm{Coll}_n(\mathscr{L}))$，$\Delta_n(\mathrm{Coll}_n(\mathscr{L}))$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ で有界量化に閉じる．

補題 2.7. $\mathscr{L}$ を $\mathscr{L}_A$ を含む一階の言語，T を $\mathscr{L}$ の理論とする．いま $T \vdash \forall\overline{x}\exists! y\varphi(\overline{x},y)$ となる $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 φ が存在したとし，新しい関数記号 f を $\mathscr{L}$ に追加して言語 $\mathscr{L}'(=\mathscr{L}\cup\{f\})$ を得る．そして以下で定める言語 $\mathscr{L}'$ の理論 T' が $T' \vdash \mathrm{Coll}_1(\mathscr{L})$ を満たすと仮定する．

$$T' = T \cup \{\forall\overline{x}, y(\varphi(\overline{x},y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y)\}$$

このとき，$\mathscr{L}'$ の各 Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する．

$$T' \vdash \forall\overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

証明. 論理式の複雑さに関する帰納法によって示す．原子論理式については補題 2.4 よりよい．帰納ステップにおいて本質的なのは有界量化である．$t(\overline{y})$ を言語 $\mathscr{L}'$ の項，$\theta(\overline{x})$ を $\mathscr{L}'$ の Δ_0 論理式とする．このとき

$$\begin{aligned}\forall\overline{x} < t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y}) &\leftrightarrow \exists z(z = t(\overline{y}) \wedge \forall\overline{x} < z\theta(\overline{x},\overline{y}))) \\ &\leftrightarrow \exists z((z = t(\overline{y}))^{\Sigma_1} \wedge \forall\overline{x} < z\theta^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y})) \qquad (\because \text{補題 2.4 と帰納法の仮定})\end{aligned}$$

となる．ここで $\forall\overline{x} < z\theta^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y})$ は $\Sigma_1(\mathrm{Coll}_1(\mathscr{L}))$ であるので，$\exists z((z = t(\overline{y}))^{\Sigma_1} \wedge \forall\overline{x} < z\theta^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y}))$ は f を含まない $\Sigma_1(T')$ 論理式である．また，

$$\begin{aligned}\forall\overline{x} < t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y}) &\leftrightarrow \forall\overline{x}(\overline{x} < t(\overline{y}) \rightarrow \theta(\overline{x},\overline{y})) \\ &\leftrightarrow \forall\overline{x}((z < t(\overline{y}))^{\Sigma_1} \rightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x},\overline{y})) \qquad (\because \text{補題 2.4 と帰納法の仮定})\end{aligned}$$

となるので有界任意量化についてはよい．次に有界存在量化についても同様にみていくと，

$$\begin{aligned}\exists\overline{x} < t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y}) &\leftrightarrow \forall z(z = t(\overline{y}) \rightarrow \exists\overline{x} < z\theta(\overline{x},\overline{y}))) \\ &\leftrightarrow \forall z((z = t(\overline{y}))^{\Sigma_1} \rightarrow \exists\overline{x} < z\theta^{\Pi_1}(\overline{x},\overline{y})) \qquad (\because \text{補題 2.4 と帰納法の仮定})\end{aligned}$$

---

*4 ここは $\mathscr{L}_A$ のときと同じ理由で厳密に Σ_n の形をした論理式のことだと考えてよい．

となり，$\exists \overline{x} < z\theta^{\Pi_1}(\overline{x},\overline{y})$ は $\Pi_1(\mathrm{Coll}_1(\mathscr{L}))$ であるので，$\forall z((z = t(\overline{y}))^{\Sigma_1} \to \exists \overline{x} < z\theta^{\Pi_1}(\overline{x},\overline{y}))$ は f を含まない $\Pi_1(T')$ 論理式である．また，

$$\begin{aligned}
&\exists \overline{x} < t(\overline{y})\theta(\overline{x},\overline{y}) \leftrightarrow \exists \overline{x}(\overline{x} < t(\overline{y}) \land \theta(\overline{x},\overline{y})) \\
&\qquad\qquad\qquad \leftrightarrow \exists \overline{x}((z < t(\overline{y}))^{\Sigma_1} \land \theta^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y})) \qquad (\because \text{補題 2.4 と帰納法の仮定})
\end{aligned}$$

となる．等号付きの有界量化の場合も同様． □

系 2.8. $\mathscr{L}$ を $\mathscr{L}_A$ を含む一階の言語，T を $\mathscr{L}$ の理論とする．いま $T \vdash \forall \overline{x} \exists! y\varphi(\overline{x}, y)$ となる $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 φ が存在したとし，新しい関数記号 f を $\mathscr{L}$ に追加して言語 $\mathscr{L}'(= \mathscr{L} \cup \{f\})$ を得る．そして以下で定める言語 $\mathscr{L}'$ の理論 T' が $T' \vdash \mathrm{Coll}_1(\mathscr{L})$ を満たすと仮定する．

$$T' = T \cup \{\forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y)\}$$

このとき，$n \geq 1$ について $\mathscr{L}'$ の各 Σ_n 論理式 $\theta(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}$ の Σ_n 論理式 $\theta^{\Sigma_n}(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi^{\Pi_n}(\overline{x})$ が存在する．

$$T' \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_n}(\overline{x})), \quad T' \vdash \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_n}(\overline{x}))$$

証明. $n \in \mathbb{N}$ による帰納法によって示す．

base: $\mathscr{L}$ の任意の Σ_1 論理式は，ある Δ_0 論理式 $\psi(\overline{x},\overline{y})$ によって $\exists \overline{y}\psi(\overline{x},\overline{y})$ と書ける．すると補題 2.7 から，ある $\mathscr{L}_A$ の Σ_1 論理式 $\psi^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y})$ で

$$T' \vdash \forall \overline{x}, \overline{y}(\psi(\overline{x},\overline{y}) \leftrightarrow \psi^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y}))$$

を満たすものが存在する．このとき，

$$T' \vdash \forall \overline{x}(\exists \overline{y}\psi(\overline{x},\overline{y}) \leftrightarrow \exists \overline{y}\psi^{\Sigma_1}(\overline{x},\overline{y}))$$

である．Π_1 論理式についても同様．

induction: $n \geq 2$ としてよい．

$\mathscr{L}$ の任意の Σ_n 論理式は，ある Π_{n-1} 論理式 $\psi(\overline{x},\overline{y})$ によって $\exists \overline{y}\psi(\overline{x},\overline{y})$ と書ける．すると帰納法の仮定から，ある $\mathscr{L}_A$ の Π_{n-1} 論理式 $\psi^{\Pi_{n-1}}(\overline{x},\overline{y})$ で

$$T' \vdash \forall \overline{x}, \overline{y}(\psi(\overline{x},\overline{y}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_{n-1}}(\overline{x},\overline{y}))$$

を満たすものが存在する．このとき，

$$T' \vdash \forall \overline{x}(\exists \overline{y}\psi(\overline{x},\overline{y}) \leftrightarrow \exists \overline{y}\psi^{\Pi_{n-1}}(\overline{x},\overline{y}))$$

である．Π_n 論理式についても同様． □

補題 2.7 や系 2.8 は，関係記号についても同じようなことがいえる．

系 2.9. $\mathscr{L}$ を $\mathscr{L}_A$ を含む一階の言語，T を $\mathscr{L}$ の理論とする．いま $T \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$ を満たす $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\psi(\overline{x})$ が存在したとし，新しい関係記号 R を追加して言語 $\mathscr{L}'(= \mathscr{L} \cup \{R\})$ を得る．そして言語 $\mathscr{L}'$ の理論 T' を以下のように定める．

$$T' = T \cup \{\forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x}))\}$$

このとき，$\mathscr{L}'$ の各 Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する．

$$T' \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

また $n \geq 1$ について $\mathscr{L}'$ の各 Σ_n 論理式 $\theta(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}$ の Σ_n 論理式 $\theta^{\Sigma_n}(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi^{\Pi_n}(\overline{x})$ が存在する．

$$T' \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_n}(\overline{x})), \quad T' \vdash \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_n}(\overline{x}))$$

証明. $\theta(\overline{x})$ を $\mathscr{L}'$ の Δ_0 論理式とすると，その中の $R(\overline{x})$ の出現を $\varphi(\overline{x})$ もしくは $\psi(\overline{x})$ の都合のよい方で置き換えていけば $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が得られる．$n \geq 1$ についても同様． $\square$

定理 2.10. T_0 を $\mathrm{Coll}_1(\mathscr{L}_A)$ を含意する言語 $\mathscr{L}_A$ の理論とする．いま理論の可算列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} T_{i+1} = T_i &\cup \left\{ \forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は新し関数記号．} \varphi(\overline{x}, y) \text{ は } \mathscr{L}_i \text{の} \Sigma_1 \text{論理式であり，} \\ \text{かつ } T_i \vdash \forall \overline{x} \exists! y \varphi(\overline{x}, y) \text{ が成り立つ．} \end{array} \right\} \\ &\cup \left\{ \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x})) \;\middle|\; \begin{array}{l} R \text{ は新しい関係記号．} \varphi(\overline{x}) \text{ は } \mathscr{L}_i \text{の} \Sigma_1 \text{論理式であり，かつ} \\ T_i \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})) \text{ を満たす } \mathscr{L}_i \text{の} \Pi_1 \text{ 論理式 } \psi \text{ が存在する．} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

言語 $\mathscr{L}_i$ を理論 T_i の言語とし，$\mathscr{L} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{L}_i$，$T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ とおく．このとき，以下が成り立つ．

(1) T は T_0 の保存的拡大．

(2) $\mathscr{L}$ の任意の Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}_A$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する．

$$T \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

(3) $n \geq 1$ とする．$\mathscr{L}$ の任意の Σ_n 論理式 $\theta(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}_A$ の Σ_n 論理式 $\theta^{\Sigma_n}(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi^{\Pi_n}(\overline{x})$ が存在する．

$$T \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_n}(\overline{x})), \quad T \vdash \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_n}(\overline{x}))$$

(4) すべての $f, R \in \mathscr{L}$ について，以下を満たす $f_1, R_1 \in \mathscr{L}_1$ が存在する．

$$T \vdash \forall \overline{x}(f(\overline{x}) = f_1(\overline{x})), \quad T \vdash \forall \overline{y}(R(\overline{y}) \leftrightarrow R_1(\overline{y}))$$

(5) $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ が $T \vdash \forall \overline{x} \exists! y \varphi(\overline{x}, y)$ を満たすとする．このとき，ある $f \in \mathscr{L}_1$ が存在し以下が成り立つ．

$$T \vdash \forall \overline{x}, y(f(\overline{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y))$$

(6) $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\psi(\overline{x})$ が $T \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{y}))$ を満たすとする．このとき，ある $R \in \mathscr{L}_1$ が存在し以下が成り立つ．

$$T \vdash \forall \overline{x}(R(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$$

(7) $\mathscr{L}$ 構造 M, N がそれぞれ T のモデルであるとする．このとき，$\mathscr{L}_A$ 構造についての同型写像 $h : M \restriction \mathscr{L}_A \to N \restriction \mathscr{L}_A$ は，$\mathscr{L}$ 構造の同型写像に拡張できる．

(8) $\mathscr{L}_A$ 構造 M_0, N_0 がそれぞれ T_0 のモデルであるとする．このとき，M_0, N_0 をそれぞれ $\mathscr{L}$ へ自明な方法で拡大した構造を M, N とすれば[*5]以下が成り立つ．

$$M_0 \cong N_0 \Leftrightarrow M \cong N$$

証明． (1) 帰納法によって簡単に示せる．

(2)(3) まず (2)⇒(3) は系 2.8 の証明において補題 2.7 の代わりに (2) を使えばそれが証明になる．

(2) を示す．$\theta(\overline{x})$ を $\mathscr{L}$ の Δ_0 論理式とすると，$\theta(\overline{x})$ に現れる記号は有限個であるので，ある $i \in \mathbb{N}$ によって $\theta(\overline{x})$ は $\mathscr{L}_i$ の論理式である．いま $T_i \subseteq T$ であることを考慮すれば，次が任意の $i \in \mathbb{N}$ について成り立つことを示せば十分である．

$$({}^{i}) \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{L}_i\text{の任意の}\Delta_0\text{論理式}\theta(\overline{x})\text{ に対し，}T_i \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x})) \\ \text{を満たす }\mathscr{L}_A\text{の}\Sigma_1\text{論理式}\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})\text{ と}\Pi_1\text{論理式}\theta^{\Pi_1}(\overline{x})\text{ が存在する．} \end{array} \right\}$$

$\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_A$ であるので $i = 0$ のときに $({}^{i})$ が成り立つのは明らか．ある i で $({}^{i})$ が成り立つと仮定する．$i+1$ で成り立つことを示すためには，次が任意の $k \in \mathbb{N}$ について成り立てば十分．

$$({}^{k}) \left\{ \begin{array}{l} k\text{ 種類の }\mathscr{L}_{i+1} \backslash \mathscr{L}_i\text{の記号を含む任意の }\mathscr{L}_{i+1}\text{の}\Delta_0\text{論理式}\theta(\overline{x})\text{ に対し，} \\ T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))\text{ を満たす }\mathscr{L}_A\text{の}\Sigma_1\text{論理式}\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})\text{ と} \\ \Pi_1\text{論理式}\theta^{\Pi_1}(\overline{x})\text{ が存在する．} \end{array} \right\}$$

$k = 0$ なら明らか．$\theta(\overline{x})$ が $k+1$ 種類の $\mathscr{L}_{i+1} \backslash \mathscr{L}_i$ の記号を含むと仮定したとき，その $k+1$ 種の内にもし関係記号を含んでいるならその場合も明らか．よって $\theta(\overline{x})$ は $k+1$ 種類の $\mathscr{L}_{i+1} \backslash \mathscr{L}_i$ の関数記号を含んでいるとしてよい．このとき，ある $k+1$ 個の関数記号 $f_1, ..., f_{k+1}$ によって $\theta(\overline{x})$ は言語 $\mathscr{L} \cup \{f_1, ..., f_k, f_{k+1}\}$ の論理式となる．

<u>Claim:</u> T_{i+1} は $\mathrm{Coll}_1(\mathscr{L}_i \cup \{f_1, ..., f_k\})$ を含意する．

$\varphi(x, \overline{y}, \overline{z})$ を言語 $\mathscr{L}_i \cup \{f_1, ..., f_k\}$ の Σ_1 論理式とする．帰納法の仮定 $({}^{k})$ と系 2.8 の base と同様の議論から，

$$T_{i+1} \vdash \forall x, \overline{y}, \overline{z}(\varphi(x, \overline{y}, \overline{z}) \leftrightarrow \varphi^{\Sigma_1}(x, \overline{y}, \overline{z})) \tag{2.6}$$

を満たす $\mathscr{L}_A$ の Σ_1 論理式 φ^{Σ_1} が存在する．$T_{i+1} \supseteq T_0 \Rightarrow \mathrm{Coll}_1(\mathscr{L}_A)$ より，T_{i+1} はこの φ^{Σ_1} に関する採集公理を含意する．したがって式 (2.6) より T_{i+1} は最初にとった $\varphi(x, \overline{y}, \overline{z})$ に関する採集公理も含意する．

[*5] $f \in \mathscr{L}$ についてその定義公理によって f の解釈を定めるということ．またこのとき M, N は T のモデルになる

したがって Claim と補題 2.7 より

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta_k^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta_k^{\Pi_1}(\overline{x})) \tag{2.7}$$

を満たす $\mathscr{L} \cup \{f_1, ..., f_k\}$ のΣ_1論理式$\theta_k^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1論理式$\theta_k^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する．帰納法の仮定 $(^i)$ と系 2.8 の base と同様の議論から，

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\theta_k^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x})), \quad T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\psi_k^{\Pi_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_1}(\overline{x})) \tag{2.8}$$

を満たす $\mathscr{L}_A$のΣ_1論理式$\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1論理式$\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する．式 (2.7) と式 (2.8) より

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

が成り立つ．

(4) これは (3) の $n = 1$ の場合を考えればよい．

(5), (6) T の定義と (4) から分かる．

(7) T のモデルであるような $\mathscr{L}$ 構造 M, N を取り，$h : M \upharpoonright \mathscr{L}_A \to N \upharpoonright \mathscr{L}_A$ を同型写像とする．示すべきことは，すべての $\mathscr{L}$ に含まれる関数や関係を h が保存することである．したがって任意の $i \in \mathbb{N}$ について $h : M \upharpoonright \mathscr{L}_i \to N \upharpoonright \mathscr{L}_i$ が同型写像，すなわち以下が成り立つことを示せば十分．

$$(^i) \begin{cases} \mathscr{L}_i\text{の任意の } f \text{ と任意の}\overline{a} \in M \text{ に対し，} h(f^M(\overline{a})) = f^N(h(\overline{a})) \\ \mathscr{L}_i\text{の任意の } R \text{ と任意の}\overline{b} \in M \text{ に対し，} R^M(\overline{b}) \Leftrightarrow R^N(h(\overline{b})) \end{cases}$$

仮定より $i = 0$ で $(^i)$ は成り立つ．$f \in \mathscr{L}_{i+1} \backslash \mathscr{L}_i$ と $\overline{a} \in M$ をとると，この f について以下を満たす $\mathscr{L}_i$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ が存在する．

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y), \quad T_i \vdash \forall \overline{x} \exists ! y \varphi(\overline{x}, y)$$

したがって $\overline{a}, b \in M$ で $f^M(\overline{a}) = b$ とすると次が成り立つ．

$$\begin{aligned} f^M(\overline{a}) = b &\Leftrightarrow M \models \varphi(\overline{a}, b) && (\because M \models T_{i+1}) \\ &\Leftrightarrow M \upharpoonright \mathscr{L}_i \models \varphi(\overline{a}, b) && (\because \varphi \text{ は言語 } \mathscr{L}_i \text{の論理式}) \\ &\Leftrightarrow N \upharpoonright \mathscr{L}_i \models \varphi(h(\overline{a}), h(b)) && (\because \text{帰納法の仮定と定理 } 1.2) \\ &\Leftrightarrow N \models \varphi(h(\overline{a}), h(b)) && (\because \varphi \text{ は言語 } \mathscr{L}_i \text{の論理式}) \\ &\Leftrightarrow f^N(h(\overline{a})) = h(b) && (\because N \models T_{i+1})) \end{aligned}$$

以上から $f^N(h(\overline{a})) = h(f^M(\overline{a}))$ が結論できる．次に $R \in \mathscr{L}_{i+1} \backslash \mathscr{L}_i$ と $\overline{b} \in M$ をとると，この R について以下を満たす $\mathscr{L}_i$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ と Π_1 論理式 $\psi(\overline{x}, y)$ が存在する．

$$T_{i+1} \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x})), \quad T_i \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$$

したがって次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
R^M(\bar{b}) &\Leftrightarrow M \models \varphi(\bar{b}) && (\because M \models T_{i+1}) \\
&\Leftrightarrow M \restriction \mathscr{L}_i \models \varphi(\bar{b}) && (\because \varphi \text{ は言語 } \mathscr{L}_i \text{の論理式}) \\
&\Leftrightarrow N \restriction \mathscr{L}_i \models \varphi(h(\bar{b})) && (\because \text{帰納法の仮定と定理 } 1.2) \\
&\Leftrightarrow N \models \varphi(h(\bar{b})) && (\because \varphi \text{ は言語 } \mathscr{L}_i \text{の論理式}) \\
&\Leftrightarrow R^N(h(\bar{b})) && (\because N \models T_{i+1}))
\end{aligned}
$$

以上から $R^M(\bar{b}) \Leftrightarrow R^N(h(\bar{b}))$ が結論できる．

(8) (7) から分かる． □

3　可証再帰的関数および可証再帰的関係

関数記号を追加する際はそれを定義する論理式が Σ_1 ならば，関係記号を追加する際にはそれを定義する論理式が Δ_1 ならばそれぞれ安全なことが前の節で分かった．この論理式の階層に関する条件をもう少し掘り下げる．

定義 3.1. $\mathscr{L}$ を $\mathscr{L}_A$ を含む言語，T を PA^- を含意する $\mathscr{L}$ の理論とする．自然数上の関数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}(k \geq 1)$ が T において可証再帰的（*provably recursive*）であるとは，ある $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\theta(\overline{x}, y)$ が存在して，$T \vdash \forall \overline{x} \exists ! y \theta(\overline{x}, y)$ かつ，任意の $\overline{a}, b \in \mathbb{N}$ に対して

$$f(\overline{a}) = b \Leftrightarrow T \vdash \theta(\overline{a}, b)$$

が成り立つことをいう．また自然数上の関係 $R \subseteq \mathbb{N}^k(k \geq 2)$ が T において可証再帰的であるとは，ある $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\psi(\overline{x})$ が存在して，$T \vdash \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$ かつ，任意の $\overline{a} \in \mathbb{N}$ に対して

$$\overline{a} \in R \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\overline{a}) \ (\Leftrightarrow T \vdash \psi(\overline{a}))$$

が成り立つことをいう．

この可証再帰的という概念によって原子再帰的関数が特徴づけられることが知られている．

事実 3.2. 自然数上の関数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}(k \geq 1)$ について以下は同値．

- f は原始再帰的関数
- f は $I\Sigma_1$ において可証再帰的

証明． Petr と Pudlák [2] を見よ．証明論的な証明は Schwichtenberg と Wainer [3]pp.149-194 にある． □

注 3.3. 言葉の乱用だが，ある条件を満たす “論理式” を指して可証再帰的であるという表現をする．T を PA^- を含意し，$\mathbb{N} \models \{\sigma \mid \sigma \in \Sigma_1 \text{かつ } T \vdash \sigma\}$ を満たす $\mathscr{L}_A$ の理論とする．$\mathscr{L}_A$ の論理

式 $\theta(\overline{x}, y)$ について，それが Σ_1 であってさらに $T \vdash \forall\overline{x}\exists! y\theta(\overline{x}, y)$ を満たすとき，$\theta(\overline{x}, y)$ を T において可証再帰的であるという．このような表現をする理由は，この $\theta(\overline{x}, y)$ によって実際に（全域）再帰的な関数 $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ が以下で定義できるからである．

$$f(\overline{a}) := b \ s.t., T \vdash \theta(\overline{a}, b)$$

この f が再帰的であることは，任意の $\overline{a}, b \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned}
f(\overline{a}) = b &\Rightarrow T \vdash \theta(\overline{a}, b) & \\
&\Rightarrow \mathbb{N} \models \theta(\overline{a}, b) & (\because T \text{ の条件}) \\
&\Rightarrow PA^- \vdash \theta(\overline{a}, b) & (\because \text{定理 } 1.7) \\
&\Rightarrow T \vdash \theta(\overline{a}, b) & (\because T \text{ の条件}) \\
&\Rightarrow f(\overline{a}) = b &
\end{aligned}$$

となり，

$$f(\overline{a}) = b \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \theta(\overline{a}, b)$$

が成り立つので定理 1.8 から従う．

$I\Sigma_1$ は $\mathrm{Coll}_1(\mathscr{L}_A)$ を含意することから定理 2.10 の系として次を得る．

系 3.4. 理論の可算列 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を以下のように定義する．

$$T_0 = I\Sigma_1$$

$$\begin{aligned}
T_{i+1} = T_i &\cup \left\{ \forall\overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は新し関数記号．} \varphi(\overline{x}, y) \text{ は } \mathscr{L}_i \text{の} \Sigma_1 \text{論理式であり，} \\ \text{かつ } T_i \vdash \forall\overline{x}\exists! y\varphi(\overline{x}, y) \text{ が成り立つ．} \end{array} \right\} \\
&\cup \left\{ \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x})) \;\middle|\; \begin{array}{l} R \text{ は新しい関係記号．} \varphi(\overline{x}) \text{ は } \mathscr{L}_i \text{の} \Sigma_1 \text{論理式であり，かつ} \\ T_i \vdash \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})) \text{ を満たす } \mathscr{L}_i \text{の} \Pi_1 \text{ 論理式 } \psi \text{ が存在する．} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

言語 $\mathscr{L}_i$ を理論 T_i の言語とし，$\mathscr{L} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_i$，$I\Sigma_1^+ = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ とおく．このとき，以下が成り立つ．

(1) $I\Sigma_1^+$ は $I\Sigma_1$ の保存的拡大．

(2) $\mathscr{L}$ の任意の Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}_A$ の Σ_1 論理式 $\theta^{\Sigma_1}(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\theta^{\Pi_1}(\overline{x})$ が存在する．

$$I\Sigma_1^+ \vdash \forall\overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_1}(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Pi_1}(\overline{x}))$$

(3) $n \geq 1$ とする．$\mathscr{L}$ の任意の Σ_n 論理式 $\theta(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}_A$ の Σ_n 論理式 $\theta^{\Sigma_n}(\overline{x})$ と Π_n 論理式 $\psi^{\Pi_n}(\overline{x})$ が存在する．

$$I\Sigma_1^+ \vdash \forall\overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \theta^{\Sigma_n}(\overline{x})), \quad I\Sigma_1^+ \vdash \forall\overline{x}(\psi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi^{\Pi_n}(\overline{x}))$$

(4) $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ が $I\Sigma_1^+ \vdash \forall\overline{x}\exists! y\varphi(\overline{x}, y)$ を満たすとする．このとき，ある $f \in \mathscr{L}_1$ が存在し以下が成り立つ．

$$I\Sigma_1^+ \vdash \forall\overline{x}, y(f(\overline{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y))$$

(5) $\mathscr{L}$ の Σ_1 論理式 $\varphi(\overline{x})$ と Π_1 論理式 $\psi(\overline{x})$ が $I\Sigma_1^+ \vdash \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{y}))$ を満たすとする．このとき，ある $R \in \mathscr{L}_1$ が存在し以下が成り立つ．

$$I\Sigma_1^+ \vdash \forall\overline{x}(R(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))$$

(6) $\mathscr{L}$ 構造 M, N がそれぞれ $I\Sigma_1^+$ のモデルであるとする．このとき，$\mathscr{L}_A$ 構造についての同型写像 $h : M \restriction \mathscr{L}_A \to N \restriction \mathscr{L}_A$ は，$\mathscr{L}$ 構造の同型写像に拡張できる．

(7) $\mathscr{L}_A$ 構造 M_0, N_0 がそれぞれ $I\Sigma_1$ のモデルであるとする．このとき，M_0, N_0 をそれぞれ $\mathscr{L}$ へ自明な方法で拡大した構造を M, N とすれば以下が成り立つ．

$$M_0 \cong N_0 \Leftrightarrow M \cong N$$

(8) (3) より $I\Sigma_1^+ \vdash \{\, I_\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathscr{L} \text{ の} \Sigma_1 \text{論理式} \,\}$

したがって $\mathscr{L}$ 理論 $I\Sigma_1^+$ は $I\Sigma_1$ と “ほとんど変わらない” 理論であることが分かる．実際，それは保存的拡大であるし ($\because$ (1))，論理式の算術的階層構造も Δ_0 を除いて変わっていない ($\because$ (2), (3)) ために帰納法公理もある程度自由に使うことができる．さらにそれらのモデルは一意的に拡大・縮小が可能である ($\because$ (6), (7))．また $I\Sigma_1^+$ において可証再帰的な論理式によって定義できる関数・関係は実質的に $I\Sigma_1$ でも定義できる ($\because$ (4), (5))．以上のことから，$I\Sigma_1$ について何か有意味なことを示す際にはまず記号が豊富な $I\Sigma_1^+$ で議論をして，それを系 3.4 を通して本物の $I\Sigma_1$ に還元するという手法が便利かつ妥当である．よって以降では専ら $I\Sigma_1^+$ を考えるのだが，毎度 $^+$ を書くのは煩わしいので特に断らない限り $I\Sigma_1$ と書いてこの $I\Sigma_1^+$ を指すことにする．PA についても同様の約束をしておく．

念のため $I\Delta_0$ などの Coll_1 を含意しない理論についても補足しておく．まず問題になるのは補題 2.7 が一般に成立しないことである．そのため $I\Delta_0$ では算術的階層を変えずに Σ_1 や Π_1 論理式による記号の導入を行うのは難しく，ここではより簡単な論理式についてのみ考える．

命題 3.5. T_0 を PA^- を含意する言語 $\mathscr{L}_A$ の理論とする．いま理論の可算列 $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を以下のように定義する．

$$T_{i+1} = T_i \cup \left\{ \forall\overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は新し関数記号．} \varphi(\overline{x}, y) \text{ は } \mathscr{L}_i \text{の} \Delta_0 \text{論理式であり，} \\ \text{かつ } T_i \vdash \forall\overline{x}\exists! y\varphi(\overline{x}, y) \text{ が成り立ち，さらにある } \mathscr{L}_i \\ \text{の項 } t(\overline{x}) \text{ で } T_i \vdash \forall\overline{x}\exists y \le t(\overline{x})\varphi(\overline{x}, y) \text{ となる．} \end{array} \right\}$$
$$\cup \left\{ \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x})) \;\middle|\; R \text{ は新しい関係記号．} \varphi(\overline{x}) \text{ は } \mathscr{L}_i \text{ の } \Delta_0 \text{ 論理式．} \right\}$$

言語 $\mathscr{L}_i$ を理論 T_i の言語とし，$\mathscr{L} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_i$，$T = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ とおく．このとき，以下が成り立つ．

(1) T は T_0 の保存的拡大．

(2) $\mathscr{L}$ の任意の Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}_A$ の Δ_0 論理式 $\varphi(\overline{x})$ が存在する．

$$T \vdash \forall\overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}))$$

(3) $\mathscr{L}$ 構造 M, N がそれぞれ T のモデルであるとする．このとき，$\mathscr{L}_A$ 構造についての同型写像 $h : M \restriction \mathscr{L}_A \to N \restriction \mathscr{L}_A$ は，$\mathscr{L}$ 構造の同型写像に拡張できる．

(4) $\mathscr{L}_A$ 構造 M_0, N_0 がそれぞれ T_0 のモデルであるとする．このとき，M_0, N_0 をそれぞれ $\mathscr{L}$ へ自明な方法で拡大した構造を M, N とすれば以下が成り立つ．

$$M_0 \cong N_0 \Leftrightarrow M \cong N$$

証明． (2) を示す．$\mathscr{L}_{i+1}$ の Δ_0 論理式をそれと T_{i+1} 上同値な $\mathscr{L}_i$ の Δ_0 論理式に変換する操作を定めれば十分．関係記号の場合はそれを定義する論理式で置き換えるだけなので関数記号を取り除く操作を考える．いま $\theta(\overline{x})$ を $\mathscr{L}_{i+1}$ の Δ_0 論理式とし，関数記号 $f \in \mathscr{L}_{i+1} \backslash \mathscr{L}_i$ が含まれているとする．ここで φ_f を f を定義する論理式とし，$t_f(\overline{x})$ を $T_i \vdash \forall \overline{x} \exists y \leq t(\overline{x}) \varphi_f(\overline{x}, y)$ を満たす $\mathscr{L}_i$ の項とする．すると以下の (i),(ii) の手続きによって一つ f が少ない同値な論理式が得られるので，f がなくなるまで繰返すことで元の θ と同値で f を含まない Δ_0 論理式が得られる．

(i) 論理式 θ から $f(t_1(\overline{x}), ..., t_k(\overline{x}))$ を各 $t_i(\overline{x})$ に f が含まれないように一つ選ぶ．
(ii) $\theta'(\overline{x}, z)$ を $\theta(\overline{x})$ に表れる $f(t_1(\overline{x}), ..., t_k(\overline{x}))$ を新たな変数 z に置き換えた論理式とすれば

$$\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \exists z \leq t_f(t_1(\overline{x}), ..., t_k(\overline{x}))(\varphi(t_1(\overline{x}), ..., t_k(\overline{x}), z) \wedge \theta'(\overline{x}, z))$$

得られた論理式に f 以外の $\mathscr{L}_{i+1} \backslash \mathscr{L}_i$ の関数記号がまだ含まれていれば同様の手続きで同値性を保ったまま削除すればよい．□

先の命題において T_i の帰納的定義にある論理式への条件は一見厳しいように思えるかも知れないが，$T_0 = I\Delta_0$ のときこの命題によって得られる $\mathscr{L}_1$ 実際には $I\Delta_0$ において $\mathscr{L}_A$ の Δ_0 論理式によって定義できるすべての関数を含んでいる．証明は省略するが[*6]次が成り立つ．

定理 3.6 (パリクの定理)**.** T を PA^- を含むような Π_1 で公理化された $\mathscr{L}_A$ の理論とする．$\theta(\overline{x}, \overline{y})$ は Δ_0 で，$T \vdash \forall \overline{x} \exists \overline{y} \theta(\overline{x}, \overline{y})$ であるとする．このとき，ある $\mathscr{L}_A$ 項 $t(\overline{x})$ が存在し $T \vdash \forall \overline{x} \exists \overline{y} \leq t(\overline{x}) \theta(\overline{x}, \overline{y})$ が成り立つ．

よってここから特に次が従う．

系 3.7. 理論の可算列 $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を以下のように定義する．

$$T_0 = I\Delta_0$$

$$T_{i+1} = T_i \cup \left\{ \forall \overline{x}, y(\varphi(\overline{x}, y) \leftrightarrow f(\overline{x}) = y) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は新し関数記号．} \varphi(\overline{x}, y) \text{ は } \mathscr{L}_i \text{の} \Delta_0 \text{論理式であり，} \\ \text{かつ } T_i \vdash \forall \overline{x} \exists ! y \varphi(\overline{x}, y) \text{ が成り立ち，さらにある } \mathscr{L}_i \\ \text{の項 } t(\overline{x}) \text{ で } T_i \vdash \forall \overline{x} \exists y \leq t(\overline{x}) \varphi(\overline{x}, y) \text{ となる．} \end{array} \right\}$$
$$\cup \left\{ \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow R(\overline{x})) \;\middle|\; R \text{ は新しい関係記号．} \varphi(\overline{x}) \text{ は } \mathscr{L}_i \text{ の } \Delta_0 \text{ 論理式．} \right\}$$

言語 $\mathscr{L}_i$ を理論 T_i の言語とし，$\mathscr{L} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{L}_i$，$I\Delta_0^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ とおく．このとき，以下が成り立つ．

(1) $I\Delta_0^+$ は $I\Delta_0$ の保存的拡大．

[*6] 菊池 [4]pp.269-270 に分かりやすい証明がある．

(2) $\mathscr{L}$ の任意の Δ_0 論理式 $\theta(\overline{x})$ に対し，以下を満たす $\mathscr{L}_A$ の Δ_0 論理式 $\varphi(\overline{x})$ が存在する．

$$I\Delta_0^+ \vdash \forall\overline{x}(\theta(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}))$$

(3) $\mathscr{L}$ の Δ_0 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ が $I\Delta_0^+ \vdash \forall\overline{x}\exists! y\varphi(\overline{x}, y)$ を満たすとする．このとき，ある $f \in \mathscr{L}_1$ が存在し以下が成り立つ．

$$I\Delta_0^+ \vdash \forall\overline{x}, y(f(\overline{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y))$$

(4) $\mathscr{L}$ の Δ_0 論理式 $\varphi(\overline{x})$ に対し，ある $R \in \mathscr{L}_1$ が存在し以下が成り立つ．

$$I\Delta_0^+ \vdash \forall\overline{x}(R(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}))$$

(5) (2) から $I\Delta_0^+ \vdash \{I_\varphi | \varphi$ は $\mathscr{L}$ のΔ_0論理式 $\}$

証明． (4) は (2) から明らかなので (3) を示す．$I\Delta_0^+ \vdash \forall\overline{x}\exists! y\varphi(\overline{x}, y)$ を満たす $\mathscr{L}$ の Δ_0 論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ をとる．このとき (2) よりある $\mathscr{L}_A$ の Δ_0 論理式 $\psi(\overline{x}, y)$ で

$$I\Delta_0^+ \vdash \forall\overline{x}, y(\psi(\overline{x}, y) \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y)) \tag{3.1}$$

を満たすものが存在する．いま $I\Delta_0^+ \vdash \forall\overline{x}\exists! y\psi(\overline{x}, y)$ であるので (1) より $I\Delta_0 \vdash \forall\overline{x}\exists! y\psi(\overline{x}, y)$ を得る．するとパリクの定理 3.6 から $\mathscr{L}_A$ 項 $t(\overline{x})$ で $I\Delta_0 \vdash \forall\overline{x}\exists y \leq t(\overline{x})\psi(\overline{x}, y)$ を満たすものが存在する．したがってこの ψ に対応して新たな関数記号 f が $\mathscr{L}_1$ で導入されている．ゆえに式 (3.1) から

$$I\Delta_0^+ \vdash \forall\overline{x}, y(f(\overline{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\overline{x}, y))$$

が成り立つ． □

$I\Sigma_1$ と同様の理由で $I\Delta_0$ もこの系で定義される $I\Delta_0^+$ を指すことが多い．

参考文献

[1] Richard Kaye, “Models of Peano Arithmetic” ,（Oxford logic guides, 15)（Oxford science publications）Clarendon Press , Oxford University Press,1991.

[2] Hájek Petr, and Pavel Pudlák. ”Chapter IV: Models of Fragments of Arithmetic.”Metamathematics of First-Order Arithmetic. Association for Symbolic Logic, 1998. pp.213-263. https://projecteuclid.org/eBooks/perspectives-in-logic/Metamathematics-of-First-Order-Arithmetic/toc/pl/1235421926

[3] Helmut Schwichtenberg and Stanley S Wainer. “Proofs and Computations” (Perspectives in Logic). Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[4] 菊池 誠, “不完全性定理” , 共立出版,2014.