9 章 Satisfaction の行間埋め

橋本航気

2022 年 2 月 20 日

概要

上手くいかなかった所などは一部定義を変更しているが，全般的に本稿の証明は Kaye [1] の行間を埋めた形である．[*1]

1　配列操作関数とゲーデル数

Kaye [1] 補題 5.8 で示したように，Δ_0 論理式 $(x)_y = z$ は次の性質を満たす．

(a) $\forall x, y \exists! z \ (x)_y = z$
(b) $\forall x, y \ (x)_y \leq x$
(c) $\forall x, \exists y \ (y)_0 = x$
(d) $\forall x, y, z \exists w \ (\forall i < z (w)_i = (y)_i) \wedge (w)_z = x)$

この関数を元にして以降では様々な関数や関係を定義するのだが，コードに上界を与える目的以外でその関数の構成に立ち入ることはないので，上の 4 つの条件を満たせば関数の具体的構成方法はなんでもよい．

定義 1.1. $\mathrm{len}(x) = y \leftrightarrow (x)_0 = y$, $[x]_y = z \leftrightarrow (y \geq \mathrm{len}(x) \wedge z = 0) \vee (y < \mathrm{len}(x) \wedge (x)_{y+1} = z)$

PA 上で $\forall x \exists! y \mathrm{len}(x) = y$ や $\forall x, y \exists! z [x]_y = z$ が証明できることは明らか．

$[x]_y$ は以降でもっとも基本的となるデコードのための関数であり，これはコードの一番最初の元を長さと見なしてデコードを行う．

命題 1.2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，次が成り立つ．

$$PA \vdash \forall x_0, ..., x_{n-1} \exists z [\mathrm{len}(z) = n \wedge \forall i < n([z]_i = x_i)]$$

証明. ゲーデルの補題から明らか．　□

[*1] Sat_{Σ_n} などについては確認すべき作業が膨大なため省略した．不完全なものでよければ，問い合わせフォームから連絡してもらえば送付する．

定義 1.3. $\mathrm{last}(x) = y \leftrightarrow [x]_{\mathrm{len}(x)-1} = y$

定義 1.4. （有限長さ配列）各 $n \in \mathbb{N}(n \geq 1)$ に対し，

$$[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] = \min\{\, z \mid \mathrm{len}(z) = n \wedge \bigwedge_{i<n} ([z]_i = x_i) \,\}$$
$$[] = \min\{\, z \mid \mathrm{len}(z) = 0 \,\}$$

$\min\{\, z \mid \varphi(z) \,\}$ による関数の定義は https://nuhashikou.github.io/homepage/contents/genngonotuika2.pdf の 3 節を見よ．中身の論理式はすべて Δ_0 なので可証再帰的でもある．また明らかに $\forall x([[x]]_0 = x)$ である．

定義 1.5. （連結）

$$x^\frown y = \min\left\{\, z \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{len}(z) = \mathrm{len}(x) + \mathrm{len}(y) \wedge \\ \forall i < \mathrm{len}(x)([z]_i = [x]_i) \wedge \forall j < \mathrm{len}(y)([z]_{\mathrm{len}(x)+j} = [y]_j) \end{array} \,\right\}$$

定義から明らかに $\mathrm{len}(x^\frown y) = \mathrm{len}(x) + \mathrm{len}(y) \geq \max(\mathrm{len}(x), \mathrm{len}(y))$ である．

定義 1.6. （制限）

$$x \restriction y = \min\{\, w \mid \mathrm{len}(w) = y \wedge \forall i < \mathrm{len}(w)([w]_i = [x]_i) \,\}$$

定義 1.7. （置換）

$$x[y/z] = \min\left\{\, w \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{len}(w) = \max(\mathrm{len}(x), z+1) \wedge \\ \forall i < \mathrm{len}(w)\{(i = z \to [w]_i = y) \wedge (i \neq z \to [w]_i = [x]_i)\} \end{array} \,\right\}$$

定義 1.8. （部分）

$$\begin{aligned} x \subseteq_p y \leftrightarrow \mathrm{len}(x) \leq \mathrm{len}(y) \wedge & \exists i \leq \mathrm{len}(y) - \mathrm{len}(x)[\forall j < \mathrm{len}(x)([x]_j = [y]_{i+j})] \wedge \\ & \underbrace{\forall z < x(\mathrm{len}(z) \neq \mathrm{len}(x) \vee \exists i < \mathrm{len}(x)([x]_i \neq [z]_i))}_{x\text{ の最小性}} \end{aligned}$$

これは例えば $[1,3,2,7] \subseteq_p [9,8,1,3,2,7,11]$ のように，x がコードする列が y に連続的に含まれているという関係である．この $x \subseteq_p y$ の定義 2 行目で x に最小性を要求しているのは次の補題を成立させるためである．

補題 1.9. 各 $n \geq 1$ に対して，$\Sigma_n(PA)$ と $\Pi_n(PA)$ は以下の部分量化に閉じる

$$\forall x(x \subseteq_p y \to \cdots), \quad \exists x(x \subseteq_p y \wedge \cdots)$$

証明. まず $x \subseteq_p y$ は Δ_0 論理式であることに留意せよ．また，Kaye [1] 命題 7.1 より，$\Sigma_n(PA)$ と $\Pi_n(PA)$ はそれぞれ有界量化に閉じる．よって $\theta(x,y,z)$ を Σ_n 論理式とすると，$\forall x(x \subseteq_p y \to \theta(x,y,z))$ は次と同値になる．

$$\begin{aligned} \exists l[l = \mathrm{len}(y) \wedge \forall i, j \leq l[i + j \leq l \to \exists x\{\mathrm{len}(x) = j \wedge \forall k < j([x]_k = [y]_{i+k}) \wedge \\ \forall u < x(\mathrm{len}(u) \neq j) \vee \exists k < j([u]_k \neq [y]_{i+k}) \wedge \theta(x,y,z)\}] \end{aligned}$$

次に $\theta(x,y,z)$ を Π_n 論理式とすると，$\exists x(x \subseteq_p y \wedge \theta(x,y,z))$ は次と同値．

$$\forall l[l = \mathrm{len}(y) \to \exists i, j \leq l[i + j \leq l \wedge \forall x\{\mathrm{len}(x) = j \wedge \forall k < j([x]_k = [y]_{i+k})\wedge \\ \forall u < x(\mathrm{len}(u) \neq j) \vee \exists k < j([u]_k \neq [y]_{i+k}) \to \theta(x,y,z)\}]$$

□

ゲーデル数を定義する準備ができた．それによって様々な形式的定義（例えば論理式とは何か，項とは，Δ_0 論理式とは何かなど）を PA の内部で行うことが可能になる．最初のステップは，一階の言語 $\mathscr{L}_A$ の各記号 s に固有の自然数 $\nu(s)$ を割り当てることである．これは例えば下のテーブルのようにすればよい．これ自身が左の記号のゲーデル数ではないことに注意せよ．

$\mathscr{L}_A$ の記号,s	自然数,$\nu(s)$
0	0
1	1
$+$	2
$\cdot$	3
$<$	4
$=$	5
$\wedge$	6
$\vee$	7
$\neg$	8
$\exists$	9
$\forall$	10
$($	11
$)$	12
v_i	$\langle 13, i\rangle$

記号の列 $\sigma = s_0s_1...s_{n-1}$ に対するゲーデル数 $\ulcorner\sigma\urcorner$ を，列 $\nu(s_0), \nu(s_1), ..., \nu(s_{n-1})$ をコードする最小の自然数 x と定義する．

定義 1.10. （x はゲーデル数）

$$\mathrm{GN}(x) \leftrightarrow \forall i < \mathrm{len}(x)([x]_i \leq 12 \vee \exists j \leq x[x]_i = \langle 13, i\rangle)\wedge \\ \forall w < x(\mathrm{len}(w) \neq \mathrm{len}(x) \vee \exists j < \mathrm{len}(x)[x]_i \neq [w]_i)$$

例 1.11. $\ulcorner + \urcorner = [2] \neq 2$，$\ulcorner 0 = 1 \urcorner = [0,5,1]$，$\ulcorner \exists (\urcorner = [9,11]$

x, y がゲーデル数ならその連結 $x^\frown y$ もまたゲーデル数である．

例 1.12. $x = [8,11,11,1,2] = \ulcorner\neg((1+\urcorner$，$y = [1,12,5,0,12] = \ulcorner 1) = 0)\urcorner$ とすれば，$x^\frown y = [8,11,11,1,2,1,12,5,0,12] = \ulcorner\neg((1+1) = 0)\urcorner$ である．

$\mathrm{GN}(x) \wedge \mathrm{GN}(y)$ ならば，$z = \ulcorner(\urcorner^\frown x^\frown\ulcorner+\urcorner^\frown y^\frown\ulcorner)\urcorner$ もまたゲーデル数である．この z をシンプルに $\ulcorner(x+y)\urcorner$ と略記することにする．すると $\ulcorner(x+y)\urcorner$ は 2 変数 x, y の（可証再帰）関数を定める．したがって，$\ulcorner\ \urcorner$ は 2 通りの異なる方法で使われることになる．

1 $\ulcorner\ \urcorner : \mathscr{L}_A^* \to \mathbb{N}; s_0s_1...s_{n-1} \mapsto \ulcorner s_0s_1...s_{n-1}\urcorner$ の，ある文字列 $s_0s_1...s_{n-1}$ の像として．

2 t(必ずしも項とは限らない) に含まれる変数記号の数を k として，k ごとの関数

$$f_k : \mathscr{L}_A^* \to (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}); t \mapsto \ulcorner t\urcorner$$

の，ある t による像 $\ulcorner t\urcorner$ として．

一つ目は自然数であり，二つ目は関数である．1, 2 で混乱が生じるのは $\ulcorner(x = \mathsf{v}_i)\urcorner$ と書いた時だろう．そのため，サンセリフ体（グロテスク体とも言う）フォントで v と書いたら，それは固定された $\mathscr{L}_A$ の記号と見なすと約束し，$\ulcorner(x = v_i)\urcorner$ などの関数の引数とは区別する．一方 v の添え字 i やその他の変数 $(x, y, z, u, s, t, ...)$ は $\ulcorner...\urcorner$ の記法で導入される関数の引数となる．この約束から，$\ulcorner(x = \mathsf{v}_i)\urcorner$ とかけばそれは

$$x, i \mapsto \ulcorner(\urcorner^\frown x^\frown\ulcorner+\urcorner^\frown \langle 13, i\rangle^\frown\ulcorner)\urcorner$$

を意味する．また，$\ulcorner...\urcorner$ の中に表れる $\mathscr{L}_A$ の記号は，できる限り固定されていると見なす．つまり，$\ulcorner(x+y)\urcorner$ と書けばそれは

$$x, y \mapsto \ulcorner(\urcorner^\frown x^\frown\ulcorner+\urcorner^\frown y^\frown\ulcorner)\urcorner$$

を表し，次を意味しない．

$$x, y \mapsto \ulcorner(\urcorner^\frown z^\frown\ulcorner)\urcorner \quad (\text{ここで } z = x+y)$$

$\mathrm{GN}(x)$ に最小性を課したことによって $\subseteq_p$ に関して以下が成り立つ．

- $\forall x(\mathrm{GN}(x) \to x \subseteq_p x)$
- $\forall x, y, z(x \subseteq_p y \wedge y \subseteq_p z \to x \subseteq_p z)$
- $\forall x, y(x \subseteq_p y \wedge y \subseteq_p x \to x = y)$

2 関係 $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ の構成

ここでは "x は Δ_0 論理式のゲーデル数である" を意味する関係 $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ を得ることが目標である．定義のアイデアはシンプルで，x が Δ_0 論理式であることを，その Δ_0 論理式の帰納的構成が存在することと定めるのだが，このアイデアでは $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ は Σ_1 論理式にしかならない．$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ へは Δ_1 であることを要求するので $\Pi_1(I\Sigma_1)$ であることを示すのだが，そのために

は少し技術的な工夫を凝らすことになる．$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ に関する証明の本質的なアイデアはすべて $\mathrm{term}(x)$ という "x は項のゲーデル数である" を意味する関係を得る過程で得られるので，まずはここからはじめる．

定義 2.1. まず $\mathrm{termseq}(s)$ を次の $\mathscr{L}_A$ 論理式と定める．

$$\begin{aligned}\forall i < \mathrm{len}(s)\{[s]_i = \ulcorner 0 \urcorner \vee [s]_i = \ulcorner 1 \urcorner \vee \exists j \leq s([s]_i = \ulcorner \mathsf{v}_i \urcorner)\vee \\ \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner ([s]_j + [s]_k) \urcorner)\vee \\ \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner ([s]_j \cdot [s]_k) \urcorner)\}\end{aligned}$$

次に $\mathrm{term}(x)$ を $\exists s\ \mathrm{termseq}(s^\frown[x])$ という $\mathscr{L}_A$ 論理式で定める．

つまりここでは x が項であることを，x を構成する正当な項の帰納的過程 s が存在することと定義している．$\mathrm{termseq}(s)$ は明らかに $\Delta_1(PA)$ 論理式であるので $\mathrm{term}(x)$ が $\Sigma_1(PA)$ であることは即座に分かる．ここからは $\mathrm{term}(x)$ が実際は $\Delta_1(PA)$ であることを示していく．

命題 2.2. $PA \vdash \forall s, x(\mathrm{len}(s^\frown[x]) = \mathrm{len}(s) + 1 \wedge \mathrm{last}(s^\frown[x]) = x)$

よって $\mathrm{term}(x) \leftrightarrow \exists u(\mathrm{termseq}(u) \wedge \mathrm{last}(u) = x)$ である．

命題 2.3. $PA \vdash \forall s, \forall y < \mathrm{len}(s)((s \upharpoonright y)^\frown[[s]_y] = s \upharpoonright (y+1))$

証明. $s, y < \mathrm{len}(s)$ に対して

$$\begin{aligned}(s \upharpoonright y)^\frown[[s]_y] &= \min\left\{ z \;\middle|\; \begin{array}{l}\mathrm{len}(z) = \mathrm{len}(s \upharpoonright y) + \mathrm{len}([[s]_y]) \wedge \forall i < \mathrm{len}(s \upharpoonright y)([z]_i = [s \upharpoonright y]_i) \\ \wedge \forall j < \mathrm{len}([[s]_y])([z]_{j+\mathrm{len}(s \upharpoonright y)} = [[[s]_y]]_j)\end{array} \right\} \\ &= \min\{ z \mid \mathrm{len}(z) = y + 1 \wedge \forall i < y([z]_i = [s \upharpoonright y]_i) \wedge \forall j < 1([z]_{j+y} = [[[s]_y]]_j) \} \\ &= \min\{ z \mid \mathrm{len}(z) = y + 1 \wedge \forall i < y([z]_i = [s \upharpoonright y]_i) \wedge [z]_y = [s]_y \} \\ &= \min\{ z \mid \mathrm{len}(z) = y + 1 \wedge \forall i < y + 1([z]_i = [s]_i) \} \\ &= s \upharpoonright (y+1)\end{aligned}$$

□

命題 2.4. 次が PA で証明可能

(1) $\forall s(\mathrm{termseq}(s) \to \forall y \leq \mathrm{len}(s)\ \mathrm{termseq}(s \upharpoonright y))$
(2) $\forall s(\mathrm{termseq}(s) \to \forall y < \mathrm{len}(s)\ \mathrm{GN}([s]_y))$
(3) $\forall s(\mathrm{termseq}(s) \to \forall y < \mathrm{len}(s)\ \mathrm{term}([s]_y))$
(4) $\forall t[\mathrm{term}(t) \leftrightarrow (t = \ulcorner 0 \urcorner \vee t = \ulcorner 1 \urcorner \vee \exists j \leq t(t = \ulcorner \mathsf{v}_j \urcorner)\vee$
$\exists r, s \subseteq_p t(\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge (t = \ulcorner (r+s) \urcorner \vee t = \ulcorner (r \cdot s) \urcorner))]$

証明. (1) 定義から明らか.

(2) s を固定し，$\mathrm{len}(s)-1$ までの y に関する帰納法で容易に示せる.

(3) $\mathrm{termseq}(s)$ で $y<\mathrm{len}(s)$ とすると $\mathrm{termseq}((s\upharpoonright y)^\frown[[s]_y])$

(4) ($\rightarrow$) $\mathrm{term}(t)$ とするとある u で $\mathrm{termseq}(u)\wedge\mathrm{last}(u)=t$ となるから

$$\begin{aligned}&t=\ulcorner 0\urcorner\vee t=\ulcorner 1\urcorner\vee\exists j\le u(t=\ulcorner \mathsf{v}_j\urcorner)\vee\\&\exists j,k<\mathrm{len}(u)(t=\ulcorner([u]_j+[u]_k)\urcorner)\vee\\&\exists j,k<\mathrm{len}(u)(t=\ulcorner([u]_j\cdot[u]_k)\urcorner)\end{aligned}$$

が成り立ち (3) からよい.

($\leftarrow$) $t=\ulcorner 0\urcorner\vee t=\ulcorner 1\urcorner\vee\exists j\le t(t=\ulcorner \mathsf{v}_j\urcorner)$ の場合は明らか．$r,s\subseteq_p t$ で

$$\mathrm{term}(r)\wedge\mathrm{term}(s)\wedge t=\ulcorner(r+s)\urcorner$$

を満たすものが存在したとする．このとき term の定義から $\mathrm{termseq}(u_r^\frown[r])\wedge\mathrm{termseq}(u_s^\frown[s])$ を満たす u_r と u_s が存在し，$w=u_r^\frown[r]^\frown u_s^\frown[s]$ によって $\mathrm{termseq}(w^\frown[t])$ となる．$t=\ulcorner(r\cdot s)\urcorner$ の場合も同様. □

補題 2.5. （項の一意解読性）$*,*'$ は $+$ か $\cdot$ とする．次が PA で証明可能

(a) $\forall x,y(\mathrm{term}(x)\wedge\mathrm{term}(x^\frown y)\rightarrow\mathrm{len}(y)=0)$

(b) $\forall x,y(\mathrm{term}(x)\wedge\mathrm{term}(y^\frown x)\rightarrow\mathrm{len}(y)=0)$

(c) $\forall x,y,r,s(\mathrm{term}(x)\wedge\mathrm{term}(y)\wedge\mathrm{term}(r)\wedge\mathrm{term}(s)\wedge\ulcorner(x*y)\urcorner\subseteq_p\ulcorner(r*'s)\urcorner$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{c}\ulcorner(x*y)\urcorner\subseteq_p r\ \vee\\ \ulcorner(x*y)\urcorner\subseteq_p s\ \vee\\ (x=r\wedge y=s\wedge *=*')\end{array}\right\})$$

証明. (a) 次がすべての z で成り立つことを z に関する帰納法で示せば十分.

$$\forall x,y[\mathrm{len}(x^\frown y)\le z\wedge\mathrm{term}(x)\wedge\mathrm{term}(x^\frown y)\rightarrow\mathrm{len}(y)=0)]$$

$z=0$ なら明らか．$\mathrm{len}(x^\frown y)\le z+1\wedge\mathrm{term}(x)\wedge\mathrm{term}(x^\frown y)$ を満たす x,y を任意にとる．$\mathrm{len}(x)=1$ の場合 x は定数か変数であるので $[x^\frown y]_0=[x]_0\neq\ulcorner(\urcorner$ となり $x^\frown y$ も定数か変数である．よって $1=\mathrm{len}(x^\frown y)=\mathrm{len}(x)+\mathrm{len}(y)$ すなわち $\mathrm{len}(y)=0$ を得る．$\mathrm{len}(x)>1$ の場合を考える．このとき以下を満たす r,s,p,q が存在する．ただし $*,*'$ は $+$ か $\cdot$ である.

$$\begin{gathered}\mathrm{term}(r)\wedge\mathrm{term}(s)\wedge x=\ulcorner(r*s)\urcorner\wedge\\ \mathrm{term}(p)\wedge\mathrm{term}(q)\wedge x^\frown y=\ulcorner(p*'q)\urcorner\end{gathered}$$

<u>Claim (a)-1:</u> $\mathrm{len}(r)=\mathrm{len}(p)$

もし仮に $\mathrm{len}(r)\neq\mathrm{len}(p)$ だったとする．$\mathrm{len}(r)<\mathrm{len}(p)$ とすると，$\mathrm{len}(w)>0$ なる w によって $r^\frown w=p$ と書けるが，$\mathrm{len}(r^\frown w)=\mathrm{len}(p)<\mathrm{len}(x^\frown y)\le z+1$ より $\mathrm{term}(r^\frown w)\le z$ であるので

帰納法の仮定より $\mathrm{len}(w) = 0$ が導かれて矛盾する．逆に $\mathrm{len}(r) > \mathrm{len}(p)$ としても同様にある w で $p^\frown w = r$ となり，$\mathrm{len}(p^\frown w) = \mathrm{len}(r) < \mathrm{len}(x) \leq z + 1$ から帰納法の仮定で矛盾が導かれる．Claim (a)-1 の証明終わり．

したがって $r = p$ および $* = *'$ が成り立つ．$\mathrm{len}(x) \leq \mathrm{len}(x^\frown y)$ なので $\mathrm{len}(s) \leq \mathrm{len}(q)$ である．よってある w によって $s^\frown w = q$ と書けるので，Claim (a)-1 と同じ議論によって $\mathrm{len}(s) = \mathrm{len}(q)$ も結論できる．ゆえに $\mathrm{len}(x^\frown y) = \mathrm{len}(x) + \mathrm{len}(y) = \mathrm{len}(x)$ より $\mathrm{len}(y) = 0$ を得ることができた．

(b) 先ほどの (a) の証明では前から項の長さをそろえていた．(b) では逆に後ろから項の長さをそろえていけばよい．

(c) r, s を $\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s)$ を満たすようにとって固定し，$*'$ も固定する．このとき $(a), (b)$ より

$$\forall v(\mathrm{term}(v) \wedge v \subseteq_p \ulcorner (r *' s) \urcorner \to v \subseteq_p r \vee v \subseteq_p s \vee v = \ulcorner (r *' s) \urcorner)$$

を示せばよく，さらにこれは次を示せば十分．

$$\begin{aligned}\forall z \forall u, v, w(&\mathrm{term}(v) \wedge \mathrm{len}(v) \leq z \wedge u^\frown v^\frown w = \ulcorner (r *' s) \urcorner \\ &\to \mathrm{len}(w) \geq \mathrm{len}(s) + 2 \vee \mathrm{len}(u) \geq \mathrm{len}(r) + 2 \vee \mathrm{len}(u) = \mathrm{len}(w) = 0)\end{aligned}$$

z に関する帰納法で示す．長さ 0 の項は存在しないので $z = 0$ なら前提偽である．$z = 1$ のとき，$\mathrm{term}(v)$ なる v は変数か定数であるので，$v \subseteq_p r$ か $v \subseteq_p s$ のいずれかである．$u^\frown v^\frown w = \ulcorner (r *' s) \urcorner$ なる u, w を任意にとると，前者の場合 $w \supseteq_p \ulcorner *' s) \urcorner$ なので

$$\mathrm{len}(w) \geq \mathrm{len}(\ulcorner *' s) \urcorner) = \mathrm{len}(s) + 2$$

となる．後者の場合も同様に $u \subseteq_p \ulcorner (r *' \urcorner$ より $\mathrm{len}(u) \geq \mathrm{len}(r) + 2$ となるのでよい．

$z \geq 1$ で成り立つと仮定する．いま $\mathrm{term}(v) \wedge \mathrm{len}(v) = z + 1 \wedge u^\frown v^\frown w = \ulcorner (r *' s) \urcorner$ なる u, v, w を任意にとれば，特に $\mathrm{len}(v) = z + 1 \geq 2$ から v は変数や定数ではない．したがってある $x, y \subseteq_p v$ で

$$\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(y) \wedge \ulcorner (x * y) \urcorner = v$$

となる．ただし $*$ は $+$ か $\cdot$ である．このとき

$$\mathrm{len}(\ulcorner (x * y) \urcorner) = \mathrm{len}(x) + \mathrm{len}(y) + 3 = \mathrm{len}(v) = z + 1$$

より $\mathrm{len}(x), \mathrm{len}(y) \leq z$ である．また

$$u^\frown v^\frown w = u^\frown \ulcorner (x * y) \urcorner^\frown w = \ulcorner (r *' s) \urcorner$$

であるので，x について

$$\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{len}(x) \leq z \wedge u^\frown \ulcorner (x * y) \urcorner^\frown w = \ulcorner (r *' s) \urcorner$$

に帰納法の仮定を適用して

Case1x: $\mathrm{len}(\ulcorner * y) \urcorner^\frown w) \geq \mathrm{len}(s) + 2$

Case2x: $\mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) \geq \mathrm{len}(r)+2$
Case3x: $\mathrm{len}(\ulcorner{*y})\urcorner^\frown w) = \mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) = 0$

の 3 パターンが得られる．まず Case3x はあり得ない．さらに Case1x と Case2x が同時に成り立つこともない．実際，もし両方成り立てば

$$\mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) + \mathrm{len}(\ulcorner{*y})\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{len}(r)+\mathrm{len}(s)+4$$

だが，

$$\begin{aligned}\mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) + \mathrm{len}(\ulcorner{*y})\urcorner^\frown w) &= \mathrm{len}(u^\frown\ulcorner({*y})\urcorner^\frown w)\\ &\leq \mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(x*y)\urcorner^\frown w)\\ &= \mathrm{len}(\ulcorner(r*' s)\urcorner) = \mathrm{len}(r)+\mathrm{len}(s)+3\end{aligned}$$

となり矛盾が生じる．

また y についても

$$\mathrm{term}(y) \wedge \mathrm{len}(y) \leq z \wedge u^\frown\ulcorner(x*y)\urcorner^\frown w = \ulcorner(r*' s)\urcorner$$

に帰納法の仮定を適用して

Case1y: $\mathrm{len}(\ulcorner)\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{len}(s)+2$
Case2y: $\mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(x*\urcorner) \geq \mathrm{len}(r)+2$
Case3y: $\mathrm{len}(\ulcorner{*y})\urcorner^\frown w) = \mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) = 0$

の 3 パターンが得られる．同様に Case3y はあり得ず，Case1y と Case2y が同時に成り立つこともない．したがって整理すると論理的には以下の 3 パターンがあり得る．

(1) $\mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) \geq \mathrm{len}(r)+2$
(2) $\mathrm{len}(\ulcorner)\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{len}(s)+2$
(3) $\mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(x*\urcorner) \geq \mathrm{len}(r)+2$ かつ $\mathrm{len}(\ulcorner{*y})\urcorner^\frown w) \geq \mathrm{len}(s)+2$

(1) のとき: このとき $\mathrm{len}(u) \geq \mathrm{len}(r)+2$ であることを示す．もし仮に $\mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) = \mathrm{len}(r)+2$ だとすると，ある t によって $x^\frown t = s$ となる．すると $\mathrm{term}(x^\frown t)$ であるので (a) より $\mathrm{len}(t) = 0$ となり $x = s$ である．したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{len}(r)+\mathrm{len}(s)+3 = \mathrm{len}(\ulcorner(r*' s)\urcorner) &= \mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(x*y)\urcorner^\frown w)\\ &= \mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(\urcorner) + \mathrm{len}(x) + \mathrm{len}(\ulcorner{*y})\urcorner^\frown w)\\ &\geq \mathrm{len}(r)+2+\mathrm{len}(s)+3 \qquad (\because \mathrm{len}(y) \geq 1)\end{aligned}$$

となり矛盾が導かれる．

(2) のとき: (1) 同様に $\mathrm{len}(\ulcorner)\urcorner^\frown w) = \mathrm{len}(s)+2$ と仮定すれば矛盾が生じ $\mathrm{len}(w) \geq \mathrm{len}(s)+2$ が結論できる．

(3) のとき: もし仮に片方でも等号が成り立たないとすると

$$\mathrm{len}(\ulcorner(r *' s)\urcorner) = \mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(x*\urcorner) + \mathrm{len}(\ulcorner *y)\urcorner{}^\frown w) - 1 > \mathrm{len}(r) + \mathrm{len}(s) + 3$$

が導かれて矛盾が生じる．したがって $\mathrm{len}(u^\frown\ulcorner(x*\urcorner) = \mathrm{len}(r)+2$ かつ $\mathrm{len}(\ulcorner *y)\urcorner{}^\frown w) = \mathrm{len}(s)+2$ が成り立つ．よって $* = *'$ であり，ある t_1, t_2 によって $t_1^\frown x = r$，$y^\frown t_2 = s$ となる．すると $(a), (b)$ から $\mathrm{len}(t_1) = \mathrm{len}(t_2) = 0$ が結論できるので $\mathrm{len}(u) = \mathrm{len}(w) = 0$ が得られたことになる．以上で帰納法が完了した． □

先の (c) の証明中で示したことは後で使うので切り抜いておく．

系 2.6. 以下 $*$ は $+$ か $\cdot$ のいずれかである．

$PA \vdash \forall r, s, v(\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge \mathrm{term}(v) \wedge v \subseteq_p \ulcorner(r * s)\urcorner \to v \subseteq_p r \vee v \subseteq_p s \vee v = \ulcorner(r * s)\urcorner)$

定義 2.7. （コードの所属）

$$x \in_c s \leftrightarrow \exists i < \mathrm{len}(s) x = [s]_i$$

定義から $s \subseteq_p s'$ のとき $x \in_c s$ なら $x \in_c s'$ が成り立つ．また $\neg x \in_c s$ は $x \notin_c s$ と書くことにする．

定義 2.8. 2 変数論理式 s determines-term(x) を次の論理式とする．

$$\forall i < \mathrm{len}(s)([s]_i \subseteq_p x) \wedge \mathrm{termseq}(s) \wedge \forall y(y \subseteq_p x \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown[y]) \to y \in_c s)$$

インフォーマルに s determines-term(x) を言い換えると，「それ自身が項となるような x の部分を，s は過不足無く含んでいる」ということである．例えば s, x が s determines-term(x) を満たすとすると，$a, b \in_c s \wedge \ulcorner(a+b)\urcorner \subseteq_p x$ のとき $\ulcorner(a+b)\urcorner \in_c s$ が成り立つ．ここで x 自身は項でなくとも s determines-term(x) が成り立つことがある点に注意せよ．また補題 1.9 より，この論理式自体は $\Delta_1(PA)$ である．

命題 2.9. $PA \vdash \forall x, s(s \text{ determines-term}(x) \leftrightarrow s \text{ determines-term}(x \upharpoonright \mathrm{len}(x)))$

証明. $\forall y(y \subseteq_p x \leftrightarrow y \subseteq_p x \upharpoonright \mathrm{len}(x))$ より明らか． □

補題 2.10. $PA \vdash \forall x \exists s(s \text{ determines-term}(x))$

証明. 先の命題より $\forall x \forall y \le \mathrm{len}(x) \exists s(s \text{ determines-term}(x \upharpoonright y)))$ を示せばよい．そのために，$\varphi(x, y)$ を $\exists s(s \text{ determines-term}(x \upharpoonright y))$ とおいて

$$\forall x[\varphi(x, 0) \wedge \forall y < \mathrm{len}(x)(\varphi(x, y) \to \varphi(x, y+1))]$$

を示せば十分．x を固定する．$\varphi(x, 0)$ は s として $[]$ を考えれば良い．$y < \mathrm{len}(x)$ について $\varphi(x, y)$ を仮定する．するとある s によって

$$s \text{ determines-term}(x \upharpoonright y)$$

となる．いま $x \upharpoonright (y+1) = (x \upharpoonright y)^\frown [[x]_y]$ における $[[x]_y]$ に応じて場合分けして考える．

<u>Case1:</u> $[[x]_y] = \ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner$ のとき．

$s^\frown [[[x]_y]]$ determines-term$(x \upharpoonright (y+1))$ が成り立つことを示す． まず

$$\forall i < \mathrm{len}(s)+1([s^\frown [[[x]_y]]]_i \subseteq_p x \upharpoonright (y+1)) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [[[x]_y]])$$

は容易に確かめられる．あとは

$$\forall v(v \subseteq_p x \upharpoonright (y+1) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [[[x]_y]]^\frown [v]) \rightarrow v \in_c s^\frown [[[x]_y]])$$

を v の長さに関する $y+1$ までの高々帰納法で示す[*2]．v が定数や変数なら明らかなので $v = \ulcorner (r * t) \urcorner$（ただし $\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(t)$,$*$ は $+$ か $\cdot$）の場合を考える．このとき v の最後尾は右括弧なので $v \subseteq_p x \upharpoonright y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [[[x]_y]]^\frown [v])$ と項の一意解読性 (c) より

$$r \subseteq_p x \upharpoonright y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [[[x]_y]]^\frown [r]) \wedge t \subseteq_p x \upharpoonright y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [[[x]_y]]^\frown [t])$$

であり，$\mathrm{len}(r), \mathrm{len}(t) < \mathrm{len}(v)$ なので帰納法の仮定からある $i, j < \mathrm{len}(s)+1$ が存在して $r = [s^\frown [[[x]_y]]]_i \wedge t = [s^\frown [[[x]_y]]]_j$ となる．あとは $i, j < \mathrm{len}(s)$ を示せば帰納法が完了する．なぜならこのとき $v = \ulcorner ([s]_i * [s]_j) \urcorner$ となって $\mathrm{termseq}(s^\frown [v])$ が導かれるので，s determines-term$(x \upharpoonright y)$ より $v \in_c s$ となるからである．まずもし $\mathrm{len}(r) = \mathrm{len}(t) = 1$ なら，$r, t \subseteq_p x \upharpoonright y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [r]) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [t])$ なので，s determines-term$(x \upharpoonright y)$ から $i, j < \mathrm{len}(s)$ が導かれる．次に $\mathrm{len}(r) > 1$ とする．このとき $r \neq [[x]_y]$ なので，$i < \mathrm{len}(s)$ となる．このとき $\mathrm{len}(t) = 1$ なら $t \subseteq_p x \upharpoonright y \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [t])$ より $j < \mathrm{len}(s)$ となりよい．$\mathrm{len}(t) > 1$ でも，$t \neq [[x]_y]$ なので $j < \mathrm{len}(s)$ となる．したがっていずれの場合も $i, j < \mathrm{len}(s)$ が成り立つ．

<u>Case2:</u> $[[x]_y] = \ulcorner) \urcorner$ のとき．

もし $x \upharpoonright y$ がある r と $i, j < \mathrm{len}(s)$ によって $\ulcorner r([s]_i * [s]_j \urcorner$（ここで $*$ は $+$ か $\cdot$）と書けないなら s determines-term$(x \upharpoonright (y+1))$ であることが容易に確かめられるので，そのように書けたとする．このとき $s' = s^\frown [\ulcorner ([s]_i * [s]_j) \urcorner]$ が s' determines-term$(x \upharpoonright (y+1))$ を満たすことを示す．まず $\forall i < \mathrm{len}(s')([s']_i \subseteq_p x \upharpoonright (y+1))$ と $\mathrm{termseq}(s')$ は明らか．$v \subseteq_p x \upharpoonright (y+1) \wedge \mathrm{termseq}(s'^\frown [v])$ なる v を任意にとる．このとき $\mathrm{term}(v)$ であることに注意せよ．まず $\neg v \subseteq_p x \upharpoonright y$ なら $v = \ulcorner ([s]_i * [s]_j) \urcorner = \mathrm{last}(s')$ であるのでよい．$v \subseteq_p x \upharpoonright y$ のときを考える．$\mathrm{len}(v) = 1$ なら自明なので $\mathrm{len}(v) \geq 2$ とすると，ある $l', k' < \mathrm{len}(s') = \mathrm{len}(s)+1$ によって $v = \ulcorner ([s']_{l'} * [s']_{k'}) \urcorner$ となる．このとき $\mathrm{termseq}(s^\frown [[s']_{l'}]) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [[s']_{k'}])$ であるので，ある $l, k < \mathrm{len}(s)$ によって $[s']_{l'} = [s]_l$, $[s']_{k'} = [s]_k$ となる．よって $\mathrm{termseq}(s^\frown [v])$ が得られて $v \in_c s$ すなわち $v \in_c s'$ が成り立つ．

<u>Case3:</u> $[[x]_y]$ がそれ以外のとき．

s determines-term$(x \upharpoonright (y+1))$ である．

[*2] 形式的には

$$\forall v, z\{(v \subseteq_p x \upharpoonright (y+1) \wedge \mathrm{termseq}(s^\frown [[[x]_y]]^\frown [v]) \wedge \mathrm{len}(v) \leq z) \rightarrow v \in_c s^\frown [[[x]_y]]\}$$

を，z に関する $y+1$ までの高々帰納法で示している．このように，長さを表す別の変数に関する帰納法を “長さに関する帰納法” と表現することにする．

$\square$

補題 2.11.

$$PA \vdash \forall x, s, t(s \text{ determines-term}(x) \land t \text{ determines-term}(x) \to \forall i < \text{len}(s)[s]_i \in_c t)$$

証明. x, s, t を s determines-term$(x) \land t$ determines-term(x) を満たすようにとって固定する．このとき $\forall y \leq \text{len}(s) \forall i < y[s]_i \in_c t$ を y に関する高々帰納法で示す．$y = 0$ なら示すべきことがない．$\forall i < y[s]_i \in_c t$ とすると，示すべきは $[s]_y \in_c t$ である．まず $[s]_y$ が定数か変数なら即座に termseq$(t^\frown[[s]_y])$ であるのでよい．次にある $i, j < y$ で $[s]_y = \ulcorner([s]_i * [s]_j)\urcorner(\subseteq_p x)$ となっているとすると，帰納法の仮定から $[s]_i, [s]_j \in_c t$ となり termseq$(t^\frown[[s]_y])$ であるから $[s]_y \in t$ が成り立つ． $\square$

系 2.12.

$$PA \vdash \forall x, s, t(s \text{ determines-term}(x) \land t \text{ determines-term}(x) \to \forall y(y \in_c s \leftrightarrow y \in_c t))$$

命題 2.13.

$$PA \vdash \forall x(\text{term}(x) \leftrightarrow \forall s(s \text{ determines-term}(x) \to x \in_c s))$$

したがって term(x) は $\Delta_1(PA)$ である．

証明. x を任意に取って固定しておく．

($\leftarrow$) 補題 2.10 より s determines-term(x) を満たす s は存在し，termseq(s) より任意の $y \in_c s$ は term(y) である．よって仮定から $x \in_c s$ なので term(x) が成り立つ．

($\to$) s determines-term(x) かつ $x \in_c s$ を満たす s が一つでもあれば，系 2.12 よりすべての t determines-term(x) を満たす t が $x \in_c t$ も満たす．そのような s の存在を二段階に分けて示す．

まず term(x) より termseq$(t) \land \text{last}(t) = x$ を満たす t が存在する．特に $x \in_c t \land x \subseteq_p x$ に留意せよ．ここで論理式 φ を以下とする．

$$\varphi(y, x, t) :\equiv \exists s[\text{termseq}(s) \land \forall i < \text{len}(s)([s]_i \subseteq_p x) \land \forall i < y([t]_i \subseteq_p x \to [t]_i \in s)]$$

<u>Claim1:</u> $\forall y \leq \text{len}(t)\varphi(y, x, t)$

y に関する len(t) までの帰納法で示す．$y = 0$ の場合は補題 2.10 から即座に成り立つ．$y < \text{len}(t)$ なる y について s が termseq$(s) \land \forall i < \text{len}(s)([s]_i \subseteq_p x) \land \forall i < y([t]_i \subseteq_p x \to [t]_i \in s)$ となるなら，$[t]_y \subseteq_p x$ でないときは自明に同じ s が $y+1$ での条件を満たし，$[t]_y \subseteq_p x$ のときは $s' = s^\frown[[t]_y]$ が条件を満たす．$[t]_y \subseteq_p x$ の場合非自明なのは termseq(s') である．$[t]_y$ が定数や変数なら自明なので，ある $i, j < y$ で $[t]_y = \ulcorner([t]_i * [t]_j)\urcorner$ となる場合だけ考えればよい．このとき $[t]_i, [t]_j \subseteq_p [t]_y \subseteq_p x$ より $[t]_i, [t]_j \in s$ であるので termseq$(s^\frown[[t]_y])$ が成り立つ．Claim1 の証明終わり．

よって termseq$(s) \land \forall i < \text{len}(s)([s]_i \subseteq_p x) \land \forall i < \text{len}(t)([t]_i \subseteq_p x \to [t]_i \in s)$ を満たす s が存在する．$x \in_c t$ だったことから $x \in_c s$ であるので，冒頭の議論から次を示せば証明終了である．

Claim2: s determines-term(x)

s はいま $\mathrm{termseq}(s) \land \forall i < \mathrm{len}(s)([s]_i \subseteq_p x)$ であるので，残り示すべきは s の極大性，すなわち

$$\forall u(u \subseteq_p x \land \mathrm{termseq}(s^\frown[u]) \to u \in_c s)$$

である．いま $x \in_c s$ すなわち $\exists i < \mathrm{len}(s) x = [s]_i$ であるので，以下が $\mathrm{len}(s)$ までのすべての y で成り立つことを帰納法で示せば十分．

$$\forall i < y \forall u(u \subseteq_p [s]_i \land \mathrm{termseq}(s^\frown[u]) \to u \in_c s)$$

$y = 0$ なら示すべきことがない．$y = 1$ なら $u = [s]_0$ となる u しか前提を満たさないので明らか．帰納ステップで考えるべきは $u \subseteq_p [s]_y \land \mathrm{termseq}(s^\frown[u]) \land u \neq [s]_y$ を満たす u のみである．するといま u は項で $[s]_y$ がそれを真に含むことから $\mathrm{len}([s]_y) > 1$ である．したがってこの $[s]_y$ は定数や変数ではないので，ある $i, j < y$ によって $[s]_y = \ulcorner([s]_i * [s]_j)\urcorner$ となる．ここで系 2.6 より $u \subseteq_p [s]_i$ か $u \subseteq_p [s]_j$ が成り立つが，いずれにせよ $i, j < y$ なので帰納法の仮定から $u \in_c s$ を得る．Claim2 の証明終わり． $\square$

論理式についても同じ議論を繰返す．

定義 2.14. $\mathrm{formseq}(s)$ を次の $\mathscr{L}_A$ 論理式と定める．

$$\begin{aligned}
\forall i < \mathrm{len}(s)\{&\exists u, v \subseteq_p [s]_i(\mathrm{term}(u) \land \mathrm{term}(v) \land ([s]_i = \ulcorner(u = v)\urcorner \lor [s]_i = \ulcorner(u < v)\urcorner)) \\
&\lor \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner([s]_j \lor [s]_k)\urcorner) \\
&\lor \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner([s]_j \land [s]_k)\urcorner) \\
&\lor \exists j < i([s]_i = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner) \\
&\lor \exists j < i \exists k \leq s([s]_i = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k [s]_j)\urcorner \lor [s]_i = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k [s]_j)\urcorner)\}
\end{aligned}$$

次に $\mathrm{form}(x)$ を $\exists s\ \mathrm{formseq}(s^\frown[x])$ と定める．

これまで示してきたことから $\mathrm{formseq}(x)$ は $\Delta_1(PA)$ であり，よって $\mathrm{form}(x)$ が Σ_1 であることは明らか．

命題 2.15. 次が PA で証明可能

(1) $\forall s(\mathrm{formseq}(s) \to \forall y \leq \mathrm{len}(s)\ \mathrm{formseq}(s \restriction y))$
(2) $\forall s(\mathrm{formseq}(s) \to \forall y < \mathrm{len}(s)\ \mathrm{GN}([s]_y))$
(3) $\forall s(\mathrm{formseq}(s) \to \forall y < \mathrm{len}(s)\ \mathrm{form}([s]_y))$
(4) $\forall x\{\mathrm{form}(x) \leftrightarrow [\exists t, s(\mathrm{term}(t) \land \mathrm{term}(s) \land (x = \ulcorner(r = s)\urcorner \lor x = \ulcorner(r < s)\urcorner)) \lor$
$\exists y, z(\mathrm{form}(y) \land \mathrm{form}(z) \land (x = \ulcorner(y \land z)\urcorner \lor x = \ulcorner(y \lor z)\urcorner)) \lor$
$\exists y(\mathrm{form}(y) \land (x = \ulcorner(\neg y)\urcorner \lor \exists k \leq x(x = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k y)\urcorner \lor x = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k y)\urcorner)))]\}$

補題 2.16. $PA \vdash \forall u(\mathrm{term}(u) \to \forall y(\neg\mathrm{form}(u^\frown y) \land \neg\mathrm{form}(y^\frown u)))$

証明． u の長さに関する帰納法，すなわち以下の論理式の z に関する帰納法で示す．

$$\forall u(\mathrm{term}(u) \land \mathrm{len}(u) \leq z \to \forall y(\neg\mathrm{form}(u^\frown y) \land \neg\mathrm{form}(y^\frown u)))$$

$z = 0$ なら前提偽．$\mathrm{term}(u)$ とする．論理式の両端は括弧なので $\mathrm{len}(u) = 1$ なら自明．よって $u = \ulcorner(a *^f b)\urcorner$（ただし a, b は $\mathrm{term}(a) \land \mathrm{term}(b), *^f = + \ or \ \cdot$）とする．もし仮に，$\mathrm{form}(u^\frown y)$ を満たす y が存在したとする．このとき $[u^\frown y]_1$ が $\forall$ や $\exists$ であることはないので，あり得るパターンは 2 通りである．

<u>Case1-1:</u> $u^\frown y = \ulcorner(t_1 *^R t_2)\urcorner$ （ただし t_1, t_2 は $\mathrm{term}(t_1) \land \mathrm{term}(t_2), *^R$は $<$ か $=$）

$u^\frown y = \ulcorner(a *^f b)\urcorner{}^\frown y = \ulcorner(t_1 *^R t_2)\urcorner$ より，一番左の括弧を除いて，$\ulcorner a *^f b)\urcorner{}^\frown y = \ulcorner t_1 *^R t_2)\urcorner$ となる．すると $\ulcorner a *^f b)\urcorner$ は $*^R$ を含まないので，ある s が存在して

$$\ulcorner a *^f b)\urcorner{}^\frown(y \upharpoonright s) = t_1$$

が成り立つ．しかし，$\mathrm{term}(a) \land \mathrm{term}(t_1)$ なのでこれは項の一意解読性に矛盾する．

<u>Case1-2:</u> $u^\frown y = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$（ただし f_1, f_2 は $\mathrm{form}(f_1) \land \mathrm{form}(f_2), *^L$ は $\land$ か $\lor$）

$u^\frown y = \ulcorner(a *^f b)\urcorner{}^\frown y = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$ より，一番左の括弧を除いて，$\ulcorner a *^f b)\urcorner{}^\frown y = \ulcorner f_1 *^L f_2)\urcorner$ となる．すると $\ulcorner a *^f b)\urcorner$ は $*^L$ 記号を含まないので，ある s が存在して

$$\ulcorner a *^f b)\urcorner{}^\frown(y \upharpoonright s) = f_1$$

が成り立つ．$\mathrm{len}(a) < \mathrm{len}(u)$ より，これは帰納法の仮定に反する．

次に $\mathrm{form}(y^\frown u)$ だったと仮定する．

<u>Case2-1:</u> $y^\frown u = \ulcorner(t_1 *^R t_2)\urcorner$（ただし t_1, t_2 は $\mathrm{term}(t_1) \land \mathrm{term}(t_2), *^R$は $<$ か $=$）

$y^\frown u = y^\frown\ulcorner(a *^f b)\urcorner = \ulcorner(t_1 *^R t_2)\urcorner$ より，一番右の括弧を除いて，$\ulcorner y^\frown(a *^f b\urcorner = \ulcorner(t_1 *^R t_2\urcorner$ となる．すると $\ulcorner(a *^f b\urcorner$ は $*^R$ を含まないので，ある $\ulcorner(t_1 *^R\urcorner{}^\frown z = y$ を満たす $z \subseteq_p y$ が存在して

$$z^\frown\ulcorner(a *^f b\urcorner = t_2$$

が成り立つ．しかし，$\mathrm{term}(b) \land \mathrm{term}(t_2)$ なのでこれは項の一意解読性に矛盾する．

<u>Case2-2:</u> $y^\frown u = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$（ただし f_1, f_2 は $\mathrm{form}(f_1) \land \mathrm{form}(f_2), *^L$は $\land$ か$\lor$）

$y^\frown u = y^\frown\ulcorner(a *^f b)\urcorner = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$ より，一番右の括弧を除いて，$\ulcorner y^\frown(a *^f b\urcorner = \ulcorner(f_1 *^L f_2\urcorner$ となる．すると $\ulcorner(a *^f b\urcorner$ は $*^L$ を含まないので，ある $\ulcorner(f_1 *^L\urcorner{}^\frown z = y$ を満たす $z \subseteq_p y$ が存在して

$$z^\frown\ulcorner(a *^f b\urcorner = f_2$$

が成り立つ．$\mathrm{len}(b) < \mathrm{len}(u)$ より，これは帰納法の仮定に反する．

<u>Case2-3:</u> $y^\frown u = \ulcorner(\neg f_1)\urcorner$（ただし f_1 は $\mathrm{form}(f_1)$）

$y^\frown u = y^\frown\ulcorner(a *^f b)\urcorner = \ulcorner(\neg f_1)\urcorner$ より，一番右の括弧を除いて，$\ulcorner y^\frown(a *^f b\urcorner = \ulcorner(\neg f_1\urcorner$ となる．すると $\ulcorner(a *^f b\urcorner$ は $\ulcorner\neg\urcorner$ を含まないので，$\ulcorner(\neg\urcorner{}^\frown z = y$ を満たすある $z \subseteq_p y$ が存在して

$$z^\frown\ulcorner(a *^f b\urcorner = f_1$$

が成り立つ．$\mathrm{len}(b) < \mathrm{len}(u)$ より，これは帰納法の仮定に反する．

Case2-4: $y^\frown u = \ulcorner(Q\mathsf{v}_k f_1)\urcorner$（ただし f_1 は $\mathrm{form}(f_1), Q = \forall\ or\ \exists$）

$y^\frown u = y^\frown \ulcorner(a *^f b)\urcorner = \ulcorner(Q\mathsf{v}_k f_1)\urcorner$ より，一番右の括弧を除いて，$\ulcorner y^\frown(a *^f b\urcorner = \ulcorner(Q\mathsf{v}_k f_1\urcorner$ となる．すると $\ulcorner(a *^f b\urcorner$ は $\ulcorner Q\mathsf{v}_k\urcorner$ を含まないので，$\ulcorner(Q\mathsf{v}_k\urcorner^\frown z = y$ を満たすある $z \subseteq_p y$ が存在して

$$z^\frown \ulcorner(a *^f b\urcorner = f_1$$

が成り立つ．$\mathrm{len}(b) < \mathrm{len}(u)$ より，これは帰納法の仮定に反する．$\square$

補題 2.17. (論理式の一意解読性) $*^L, *^{L'}$ は $\wedge$ か $\vee$ とする．次が PA で証明可能

$$(a)\ \begin{cases} \forall x, y(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(x^\frown y) \to \mathrm{len}(y) = 0) \\ \forall x, y(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(y^\frown x) \to \mathrm{len}(y) = 0) \end{cases}$$

(b) $\forall x, r, s(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(r) \wedge \mathrm{form}(s) \wedge x \subseteq_p \ulcorner(r *^L s)\urcorner \to x \subseteq_p r \vee x \subseteq_p s \vee x = \ulcorner(r *^L s)\urcorner)$

(c) $\forall x, y, r, s(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(y) \wedge \mathrm{form}(r) \wedge \mathrm{form}(s) \wedge \ulcorner(x *^L y)\urcorner = \ulcorner(r *^{L'} s)\urcorner$
$\to x = r \wedge y = s \wedge *^L = *^{L'})$

証明． (a) $x^\frown y$ の長さに関する帰納法，形式的には以下の論理式における z に関する帰納法でそれぞれ示せばよい．

$$\forall x, y(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(x^\frown y) \wedge \mathrm{len}(x^\frown y) \le z \to \mathrm{len}(y) = 0)$$

$$\forall x, y(\mathrm{form}(x) \wedge \mathrm{form}(y^\frown x) \wedge \mathrm{len}(y^\frown x) \le z \to \mathrm{len}(y) = 0)$$

(a) の下段は上段と同じ議論を行うだけなので上段だけ示す．

Case(a)-1: $x = \ulcorner(u *^R v)\urcorner$（ただし u, v は $\mathrm{term}(u) \wedge \mathrm{term}(v), *^R$は $<$ か $=$ ）のとき

$[x]_1 = [x^\frown y]_1$ は $\forall, \exists$ でないので以下の二通りが候補として残る．

Case(a)-1-(i): $x^\frown y = \ulcorner(u' *^{R'} v')\urcorner$（ただし u', v'は $\mathrm{term}(u') \wedge \mathrm{term}(v'), *^{R'}$ は $<$ か $=$ ）のとき

x と $x^\frown y$ に含まれている関係記号はそれぞれ唯一であることと，項に関する一意解読性より $\mathrm{len}(y) = 0$ が従う．

Case(a)-1-(ii): $x^\frown y = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$（ただし f_1, f_2 は $\mathrm{form}(f_1) \wedge \mathrm{term}(f_2), *^L$ は $\wedge$ か $\vee$）のとき

矛盾を導く．$x^\frown y = \ulcorner(u *^R v)\urcorner^\frown y = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$ より，左括弧を取り除いて $\ulcorner u *^R v)\urcorner^\frown y = \ulcorner f_1 *^L f_2)\urcorner$ が成り立つ．$u *^R v)$ に $*^L$ は含まれないので，ある s が存在して

$$u *^R v)^\frown(y \restriction s) = f_1$$

となるが，$\mathrm{term}(u)$ なのでこれは補題 2.16 に反する．

以下の場合は全て帰納法の仮定を直接的に使い項のときと同様の議論を行えばよい．

Case(a)-2: $x = \ulcorner(f_1 *^L f_2)\urcorner$（ただし f_1, f_2は $\mathrm{form}(f_1) \wedge \mathrm{form}(f_2), *^L$は $\wedge$ か $\vee$ ）のとき

Case(a)-3: $x = \ulcorner(\neg f_1)\urcorner$（ただし f_1は $\mathrm{form}(f_1), *^L$は $\wedge$ か $\vee$ ）のとき

Case(a)-4: $x = \ulcorner(Q\mathsf{v}_k f_1)\urcorner$（ただし f_1は $\mathrm{form}(f_1), Q$ は $\forall$ か $\exists$）のとき

(b) 項の一意解読性 (c) と同様に

$$\forall x \forall r,s,u,w(\mathrm{form}(r) \wedge \mathrm{form}(s) \wedge \mathrm{form}(x) \wedge u^\frown x^\frown w = \ulcorner(r *^L s)\urcorner \\ \rightarrow \mathrm{len}(w) \geq \mathrm{len}(s)+2 \vee \mathrm{len}(u) \geq \mathrm{len}(r)+2 \vee \mathrm{len}(u) = \mathrm{len}(w) = 0))$$

を x の長さによる帰納法で示せば良い．

(c) (a) から明らか． □

定義 2.18. s determines-form(x) を次の $\Delta_1(PA)$ 論理式とする．

$$\forall i < \mathrm{len}(s)([s]_i \subseteq_p x) \wedge \mathrm{formseq}(s) \wedge \forall y(y \subseteq_p x \wedge \mathrm{formseq}(s^\frown[y]) \rightarrow y \in_c s)$$

また項のときと同様以下は明らか．

$$\forall x, \forall s(s \text{ determines-form}(x) \leftrightarrow s \text{ determines-form}(x \upharpoonright \mathrm{len}(x)))$$

補題 2.19. 次が PA で証明可能

(a) $\forall x \exists s(s \text{ determines-form}(x))$

(b) $\forall x,s,t(s \text{ determines-form}(x) \wedge t \text{ determines-form}(x) \rightarrow \forall i < \mathrm{len}(s)[s]_i \in_c t)$

証明. (a) 項の場合と細部は同じである．$\varphi(x,y)$ を $\exists s(s \text{ determines-form}(x \upharpoonright y))$ とおいて

$$\forall x[\varphi(x,0) \wedge \forall y < \mathrm{len}(x)(\varphi(x,y) \rightarrow \varphi(x,y+1))]$$

を示せば十分．x を固定する．$\varphi(x,0)$ は s として $[]$ を考えれば良い．$y < \mathrm{len}(x)$ について $\varphi(x,y)$ を仮定する．するとある s によって

$$s \text{ determines-form}(x \upharpoonright y)$$

となる．論理式の場合は $x \upharpoonright (y+1) = (x \upharpoonright y)^\frown[[x]_y]$ における $[[x]_y]$ に応じて次のように場合分けして考えればよい．

Case1: $[[x]_y] \neq \ulcorner)\urcorner$ のとき．

同じ s でよい．

Case2: $[[x]_y] = \ulcorner)\urcorner$ のとき．

Case2-(i): $x \upharpoonright y$ がある r と $i,j < \mathrm{len}(s)$ によって $\ulcorner r([s]_i *^L [s]_j\urcorner$ と書けるとき （ここで $*^L$ は $\wedge$ か $\vee$）．

$s' := s^\frown[\ulcorner([s]_i *^L [s]_j)\urcorner]$ が条件を満たす．

Case2-(ii): $x \upharpoonright y$ がある r と $i < \mathrm{len}(s)$ によって $\ulcorner r(\neg[s]_i\urcorner$ と書けるとき．

$s' := s^\frown[\ulcorner(\neg[s]_i)\urcorner]$ が条件を満たす．

あと 2 パターンあるが，全く同様なので省略する．

(b) 項の場合と同じである． □

系 2.20. $PA \vdash \forall x,s,t(s \text{ determines-form}(x) \wedge t \text{ determines-form}(x) \rightarrow \forall y(y \in_c s \leftrightarrow y \in_c t))$

命題 2.21.

$$PA \vdash \forall x(\mathrm{form}(x) \leftrightarrow \forall s((s \text{ determines-form}(x)) \to x \in_c s))$$

したがって $\mathrm{form}(x)$ は $\Delta_1(PA)$ である．

証明. 方針も詳細も項の場合と同様である． □

定義 2.22. $\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)$ を次の $\Delta_1(PA)$ 論理式と定める．

$$\begin{aligned}
&\forall i < \mathrm{len}(s)\{\exists u, v \subseteq_p [s]_i(\mathrm{term}(u) \wedge \mathrm{term}(v) \wedge ([s]_i = \ulcorner(u = v)\urcorner \vee [s]_i = \ulcorner(u < v)\urcorner))\\
&\quad \vee \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner)\\
&\quad \vee \exists j, k < i([s]_i = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner)\\
&\quad \vee \exists j < i([s]_i = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner)\\
&\quad \vee \exists j < i \exists k \leq s, \exists u \subseteq_p [s]_i(\mathrm{term}(u) \wedge \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \wedge [s]_i = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge [s]_j))\urcorner)\\
&\quad \vee \exists j < i \exists k \leq s, \exists u \subseteq_p [s]_i(\mathrm{term}(u) \wedge \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \wedge [s]_i = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k < u)) \vee [s]_j))\urcorner)\}
\end{aligned}$$

次に $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ を $\exists s\ \mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s^\frown[x])$ と定める．

命題 2.23. 次が PA で証明可能

(1) $\forall s(\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s) \to \forall y \leq \mathrm{len}(s)\ \mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright y))$
(2) $\forall s(\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s) \to \forall y < \mathrm{len}(s)\ \mathrm{GN}([s]_y))$
(3) $\forall s(\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s) \to \forall y < \mathrm{len}(s)\ \mathrm{form}_{\Delta_0}([s]_y))$
(4) $\forall x\{\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \leftrightarrow [\exists t, s(\mathrm{term}(t) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge (x = \ulcorner(r = s)\urcorner \vee x = \ulcorner(r < s)\urcorner))\vee$
$\exists y, z(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(z) \wedge (x = \ulcorner(y \wedge z)\urcorner \vee x = \ulcorner(y \vee z)\urcorner))\vee$
$\exists y(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y))\vee$
$\exists y, u(\mathrm{form}_{\Delta_0}(y) \wedge \mathrm{term}(u)\wedge\ (\exists k \leq x(\ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u\wedge$
$(x = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge y))\urcorner \vee x = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k < u)) \vee y))\urcorner)))))]\}$

命題 2.24. $PA \vdash \forall x(\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \to \mathrm{form}(x))$

証明. x の長さによる帰納法で示せばよい． □

特にここから $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ についても一意解読性が成り立つことが分かる．よって $\mathrm{form}(x)$ のアナロジーで s determines-$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ を定めれば

$$PA \vdash \forall x(\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \leftrightarrow \forall s((s \text{ determines-form}_{\Delta_0}(x)) \to \exists i < \mathrm{len}(s)([s]_i = x)))$$

が成り立つことも $\mathrm{form}(x)$ のときと全く同様にして確認できるので $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ は $\Delta_1(PA)$ である．

3　Δ_0 論理式の充足関係 $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ の構成

“ゲーデル数 x が指す Δ_0 論理式にパラメータの集合として y を与えたときに充足される” を意味する関係 $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ を構成する．証明は徐々に煩雑になるが，アイデアは前節と変わらずその帰納的構成に着目することにある．他にも $\mathrm{Sat}_{\Sigma_n}(x,y)$ を定義することもできるが，作業量が膨大なため省略した．

定義 3.1. $\mathrm{valseq}(y,s,t)$ を次の論理式と定める．

$$\begin{aligned}&\mathrm{termseq}(s)\land \mathrm{len}(t)=\mathrm{len}(s)\land\\ &\qquad\qquad\forall i<\mathrm{len}(s)\{([s]_i=\ulcorner 0\urcorner\land [t]_i=0)\lor\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad([s]_i=\ulcorner 1\urcorner\land [t]_i=1)\lor\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\exists j\le s([s]_i=\ulcorner \mathsf{v}_j\urcorner\land [t]_i=[y]_j)\lor\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\exists j,k<i([s]_i=\ulcorner([s]_j+[s]_k)\urcorner\land [t]_i=[t]_j+[t]_k)\lor\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\exists j,k<i([s]_i=\ulcorner([s]_j\cdot[s]_k)\urcorner\land [t]_i=[t]_j\cdot[t]_k)\}\end{aligned}$$

$\mathrm{val}(x,y)=z$ を次の論理式と定める．

$$\exists s,t(\mathrm{valseq}(y,s,t)\land \mathrm{last}(s)=x\land \mathrm{last}(t)=z)\lor(\neg\mathrm{term}(x)\land z=0)$$

命題 3.2. $\mathrm{val}(x,y)=z$ は PA において可証再帰的である．

証明. $\mathrm{val}(x,y)=z$ が $\Sigma_1(PA)$ であることは明らかなので

$$PA\vdash \forall x,y\exists! z\ \mathrm{val}(x,y)=z$$

を示せば良い．まず $\neg\mathrm{term}(x)$ の場合は明らかに任意の y,z について $\mathrm{val}(x,y)=z\leftrightarrow z=0$ であるので考えなくて良い．

<u>Claim1:</u> $PA\vdash \forall x,y\exists z\ \mathrm{val}(x,y)=z$

y と $\mathrm{term}(x)$ なる x を任意にとって固定する．いま $\mathrm{term}(x)$ であるから $\mathrm{termseq}(s)\land\mathrm{last}(s)=x$ なる s は取れるので，

$$\forall w\le \mathrm{len}(s)\exists t[\mathrm{len}(t)=w\land \mathrm{valseq}(y,s\restriction w,t)]$$

を w の $\mathrm{len}(s)$ までの帰納法で示せばよい．$w=0$ なら $t=[]$ でよい．$w<\mathrm{len}(s)$ について t が $\mathrm{len}(t)=w\land\mathrm{valseq}(y,s\restriction w,t)$ を満たすとする．このとき $[s]_w$ に応じて以下で定める t' が条件を満たす．

$[s]_w=\ulcorner 0\urcorner$ の場合は $t'=t^\frown[0]$
$[s]_w=\ulcorner 1\urcorner$ の場合は $t'=t^\frown[1]$
$[s]_w=\ulcorner \mathsf{v}_j\urcorner$ の場合は $t'=t^\frown[[y]_j]$
$[s]_w=\ulcorner([s]_i+[s]_j)\urcorner(i,j<w)$ の場合は $t'=t^\frown[[t]_i+[t]_j]$
$[s]_w=\ulcorner([s]_i\cdot[s]_j)\urcorner(i,j<w)$ の場合は $t'=t^\frown[[t]_i\cdot[t]_j]$

Claim2: $PA \vdash \forall x, y, z, z'(\mathrm{val}(x, y) = z \wedge \mathrm{val}(x, y) = z' \to z = z')$

y と $\mathrm{term}(x)$ なる x を任意にとって固定する．以下を示せば十分．

$$\forall s, s', t, t'(\mathrm{valseq}(y, s, t) \wedge \mathrm{valseq}(y, s', t') \wedge \mathrm{last}(s) = x = \mathrm{last}(s') \to \mathrm{last}(t) = \mathrm{last}(t'))$$

s, s', t, t' を $\mathrm{valseq}(y, s, t) \wedge \mathrm{valseq}(y, s', t') \wedge \mathrm{last}(s) = x = \mathrm{last}(s')$ を満たすよう任意にとる．次を w の $\mathrm{len}(t)$ までの帰納法で示せば良い．

$$\forall w \leq \mathrm{len}(t) \forall i < w \forall j < \mathrm{len}(t')([s]_i = [s']_j \to [t]_i = [t']_j)$$

$w = 0$ なら示すべきことがない．$w < \mathrm{len}(t)$ について $[s]_w = [s']_j$ なる $j < \mathrm{len}(t')$ を j を固定しておく（そのような j がなければ自明）．いま $\mathrm{termseq}(s) \wedge \mathrm{termseq}(s')$ だから，$[s]_w = [s']_j$ について以下の場合が考えられる．

Case1: $[s]_w = \ulcorner 0 \urcorner = [s']_j$ または $[s]_w = \ulcorner 1 \urcorner = [s']_j$ のとき．

$[s]_w = \ulcorner 0 \urcorner = [s']_j$ なら $[t]_w = 0 = [t]_j$．他方も同様．

Case2: $[s]_w = \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner = \ulcorner \mathsf{v}_{k'} \urcorner = [s']_j$ のとき．ただし $k \leq s$ かつ $k' \leq s$ である．

明らかに $k = k'$ なので $[t]_w = [y]_k = [y]_{k'} = [t']_j$

Case3: $[s]_w = \ulcorner([s]_l * [s]_m)\urcorner = \ulcorner([s']_{l'} *' [s']_{m'})\urcorner = [s']_j$ のとき．ただし $l, m < w$ かつ $l', m' < j$ で $*$ と $*'$ はそれぞれ $+$ か $\cdot$ である．

項の一意解読性より $[s]_l = [s']_{l'} \wedge [s]_m = [s']_{m'}$ で $*$ は $*'$ と等しいことが分かるので，帰納法の仮定より $[t]_l = [t']_{l'} \wedge [t]_m = [t']_{m'}$ が成り立つ．したがって

$$[t]_w = [t]_l * [t]_m = [t']_{l'} *' [t']_{m'} = [t]_j$$

$\square$

命題 3.3. PA で次が証明可能．

(1) $\forall y(\mathrm{val}(\ulcorner 0 \urcorner, y) = 0 \wedge \mathrm{val}(\ulcorner 1 \urcorner, y) = 1)$

(2) $\forall y, i(\mathrm{val}(\ulcorner \mathsf{v}_i \urcorner, y) = [y]_i)$

(3) $\forall x, y, z(\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(y) \to \mathrm{val}(\ulcorner(x + y)\urcorner, z) = \mathrm{val}(x, z) + \mathrm{val}(y, z))$

(4) $\forall x, y, z(\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(y) \to \mathrm{val}(\ulcorner(x \cdot y)\urcorner, z) = \mathrm{val}(x, z) \cdot \mathrm{val}(y, z))$

(5) $\forall k, y, x, u(\mathrm{term}(u) \wedge \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \to \mathrm{val}(u, y[x/k]) = \mathrm{val}(u, y))$

証明． (1), (2) は明らか．(3) を示す．$\mathrm{term}(x) \wedge \mathrm{term}(y)$ なる x, y を任意に取る．$\mathrm{val}(x, z) = a, \mathrm{val}(y, z) = b$ とおけば，定義から s, t で $\mathrm{valseq}(z, s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = x \wedge \mathrm{last}(t) = a$，$s', t'$ で $\mathrm{valseq}(z, s', t') \wedge \mathrm{last}(s') = y \wedge \mathrm{last}(t') = b$ を満たすものが存在する．ここで

$$s'' := s^\frown s'^\frown[\ulcorner(x + y)\urcorner], \quad t'' := t^\frown t'^\frown[a + b]$$

とおけば $\mathrm{valseq}(z, s'', t'') \wedge \mathrm{last}(s'') = \ulcorner(x + y)\urcorner \wedge \mathrm{last}(t'') = a + b$ となるので一意性から $\mathrm{val}(\ulcorner(x + y)\urcorner, z) = a + b$ である．(4) も同様．

(5) を示す．k, y, x を任意にとって固定しておき，u の長さに関する帰納法で示す[*3]．$\mathrm{term}(u) \land \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \land \mathrm{len}(u)$ を満たす u としてあり得るのは $\ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 1 \urcorner, \ulcorner \mathsf{v}_i \urcorner, \ulcorner (a * b) \urcorner$ のいずれかである．ただしここで $i \neq k, \mathrm{term}(a), \mathrm{term}(b)$, で $*$ は $+$ か $\cdot$ である．非自明なのは $u = \ulcorner (a * b) \urcorner$ の場合である．いま $\mathrm{len}(a), \mathrm{len}(b) < \mathrm{len}(u)$ かつ $\ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c a, b$ なので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}(u, y[x/k]) &= \mathrm{val}(\ulcorner (a * b) \urcorner, y[x/k]) \\
&= \mathrm{val}(a, y[x/k]) * \mathrm{val}(b, y[x/k]) \\
&= \mathrm{val}(a, y) * \mathrm{val}(b, y) && (\because a, b \text{ に帰納法の仮定を適用}) \\
&= \mathrm{val}(\ulcorner (a * b) \urcorner, y) = \mathrm{val}(u, y)
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

系 3.4. 任意の $\mathscr{L}_A$ の項 $t(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)$（項に含まれる自由変数は $\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k$ のみ）に対して，$n = \ulcorner t(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k) \urcorner$ と置けば，次が成り立つ．

$$PA \vdash \forall a_0, ..., a_k, b \forall z (z = t(a_0, ..., a_k) \leftrightarrow z = \mathrm{val}(n, [a_0, ..., a_k]^\frown b))$$

証明． $\mathscr{L}_A$ 項の構成に関する帰納法で示す．いま

$\mathbb{N} \models \mathrm{term}(n)$ であり，$\mathrm{term}(x)$ は Σ_1 なので PA^- の Σ_1 完全性より $PA \vdash \mathrm{term}(n)$ となる．$t(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)$ が定数や変数なら自明なのでそうでないとすると，

$$t(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k) = (t_L(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k) * t_R(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k))$$

となる別の項 t_L, t_R が存在する．ただし $*$ は $+$ か $\cdot$ である．すると $n_L, n_R \in \mathbb{N}$ で

$$\mathbb{N} \models n_L = \ulcorner t_L(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k) \urcorner \land n_R = \ulcorner t_R(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k) \urcorner \land n = \ulcorner (n_L * n_R) \urcorner$$

となり，再び PA^- の Σ_1 完全性より

$$PA \vdash \mathrm{term}(n_L) \land \mathrm{term}(n_R) \land n = \ulcorner (n_L * n_R) \urcorner$$

が成り立つ．$a_0, ..., a_k, b, z$ を任意にとれば，

$$\begin{aligned}
(PA \vdash) z &= t(a_0, ..., a_k) \\
&= (t_L(a_0, ..., a_k) * t_R(a_0, ..., a_k)) \\
&= \mathrm{val}(t_L(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_k), [a_0, ..., a_k]^\frown b) * \mathrm{val}(t_R(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_k), [a_0, ..., a_k]^\frown b) && (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= \mathrm{val}(n_L, [a_0, ..., a_k]^\frown b) * \mathrm{val}(n_R, [a_0, ..., a_k]^\frown b) \\
&= \mathrm{val}(\ulcorner (n_L * n_R) \urcorner, [a_0, ..., a_k]^\frown b) \\
&= \mathrm{val}(n, [a_0, ..., a_k]^\frown b)
\end{aligned}$$

□

[*3] 形式的には

$$\forall z \forall u (\mathrm{term}(u) \land \ulcorner \mathsf{v}_k \urcorner \notin_c u \land \mathrm{len}(u) \leq z \to \mathrm{val}(u, y[x/k]) = \mathrm{val}(u, y))$$

を z に関する帰納法．

定義 3.5. $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)$ を次の $\Delta_1(PA)$ 論理式とする．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)\wedge\\
&\forall l<\mathrm{len}(t)\exists i,y,w\le t[[t]_l=\langle i,y,w\rangle\wedge i<\mathrm{len}(s)\wedge w\le 1\wedge\\
&\{\ \ \exists u,u'\subseteq_p[s]_i(\mathrm{term}(u)\wedge\mathrm{term}(u')\wedge[s]_i=\ulcorner(u=u')\urcorner\wedge(w=1\leftrightarrow\mathrm{val}(u,y)=\mathrm{val}(u',y)))\\
&\ \vee\exists u,u'\subseteq_p[s]_i(\mathrm{term}(u)\wedge\mathrm{term}(u')\wedge[s]_i=\ulcorner(u<u')\urcorner\wedge(w=1\leftrightarrow\mathrm{val}(u,y)<\mathrm{val}(u',y)))\\
&\ \vee\exists j,k<i([s]_i=\ulcorner([s]_j\wedge[s]_k)\urcorner\wedge\\
&\qquad\exists l_1,l_2<l\exists w_1,w_2\le 1([t]_{l_1}=\langle j,y,w_1\rangle\wedge[t]_{l_2}=\langle k,y,w_2\rangle\wedge(w=1\leftrightarrow w_1=1\wedge w_2=1)))\\
&\ \vee\exists j,k<i([s]_i=\ulcorner([s]_j\vee[s]_k)\urcorner\wedge\\
&\qquad\exists l_1,l_2<l\exists w_1,w_2\le 1([t]_{l_1}=\langle j,y,w_1\rangle\wedge[t]_{l_2}=\langle k,y,w_2\rangle\wedge(w=1\leftrightarrow w_1=1\vee w_2=1)))\\
&\ \vee\exists j<i([s]_i=\ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner\wedge\exists l_1<l\exists w_1\le 1([t]_{l_1}=\langle j,y,w_1\rangle\wedge(w=1\leftrightarrow w_1=0)))\\
&\ \vee\exists j<i\exists k\le s\exists u\subseteq_p[s]_i(\mathrm{term}(u)\wedge[s]_i=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k<u)\wedge[s]_j))\urcorner\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\wedge\forall r<\mathrm{val}(u,y)\exists l_1<l\exists w_1\le 1([t]_{l_1}=\langle j,y[r/k],w_1\rangle)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\wedge(w=1\leftrightarrow\exists r<\mathrm{val}(u,y)\exists l_1<l([t]_{l_1}=\langle j,y[r/k],1\rangle)))\\
&\ \vee\exists j<i\exists k\le s\exists u\subseteq_p[s]_i(\mathrm{term}(u)\wedge[s]_i=\ulcorner(\forall\mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k<u))\vee[s]_j))\urcorner\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\wedge\forall r<\mathrm{val}(u,y)\exists l_1<l\exists w_1\le 1([t]_{l_1}=\langle j,y[r/k],w_1\rangle)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\wedge(w=1\leftrightarrow\forall r<\mathrm{val}(u,y)\exists l_1<l([t]_{l_1}=\langle j,y[r/k],1\rangle)))\}]
\end{aligned}
$$

次に $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ は以下の論理式とする．

$$\exists s,t[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\wedge\mathrm{last}(s)=x\wedge\exists l<\mathrm{len}(t)([t]_l=\langle\mathrm{len}(s)-1,y,1\rangle)]$$

例 3.6.

$$PA\vdash\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\forall\mathsf{v}_0(\neg(\mathsf{v}_0<(1+(1+1)))))\vee(((\mathsf{v}_0\cdot\mathsf{v}_0)<(\mathsf{v}_0+\mathsf{v}_0))\vee((\mathsf{v}_0\cdot\mathsf{v}_0)=(\mathsf{v}_0+\mathsf{v}_0))))))\urcorner,[])$$

$\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ の第一引数には $\forall n<3(n^2\le 2n)$ を正確な形で書いた論理式のゲーデル数，第二引数には空を入れている（第二引数は自由変数への割り当てなので今回は必要ない）．実際，x を上記の Sat_{Δ_0} への第一引数とすると，

$$
\begin{gathered}
s=[\ulcorner((\mathsf{v}_0\cdot\mathsf{v}_0)<(\mathsf{v}_0+\mathsf{v}_0))\urcorner,\ulcorner((\mathsf{v}_0\cdot\mathsf{v}_0)=(\mathsf{v}_0+\mathsf{v}_0))\urcorner,\\
\ulcorner(((\mathsf{v}_0\cdot\mathsf{v}_0)<(\mathsf{v}_0+\mathsf{v}_0))\vee((\mathsf{v}_0\cdot\mathsf{v}_0)=(\mathsf{v}_0+\mathsf{v}_0)))\urcorner,x]\\
t=[\langle 0,[0],0\rangle,\langle 0,[1],1\rangle,\langle 0,[2],0\rangle,\langle 1,[0],0\rangle,\langle 1,[1],1\rangle,\langle 1,[2],1\rangle,\\
\langle 2,[0],1\rangle,\langle 2,[1],1\rangle,\langle 2,[2],1\rangle,\langle 3,[],1\rangle]
\end{gathered}
$$

と定めれば，$\mathrm{len}(s)=4,\mathrm{len}(t)=10$ であり，

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\wedge[t]_9=\langle 3,[],1\rangle$$

が成り立つ．

定義 3.7. 4 変数論理式 s,t determines $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ を以下とする．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\wedge\exists l<\mathrm{len}(t)\exists i<\mathrm{len}(s)\exists w\le 1([s]_i=x\wedge[t]_l=\langle i,y,w\rangle)$$

補題 3.8.

$$PA \vdash \forall x, y(\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \to \exists s, t(s, t \text{ determines } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x, y)))$$

証明. y を任意にとり，x を $\mathrm{form}(x)$ を満たすようにとる．するとまず

$$\mathrm{formseq}(s) \wedge \mathrm{last}(s) = x$$

を満たす s がとれる．ここで以下の論理式を $\theta(i, s)$ とおく．

$$\forall m \leq i \forall y' \exists t[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (m+1), t) \wedge \mathrm{len}(t) > 0 \wedge \exists l < \mathrm{len}(t) \wedge \exists w \leq 1([t]_l = \langle m, y', w\rangle)]$$

示すべきことは $\theta(\mathrm{len}(s) - 1, s)$ なので，以下を確かめれば θ に関する帰納法公理[*4]から十分である．

$$\theta(0, s) \wedge \forall i < \mathrm{len}(s) - 1(\theta(i, s) \to \theta(i+1, s))$$

<u>Base:</u> $\theta(0, s)$

示すべきは $\forall y' \exists t[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright 1, t) \wedge \mathrm{len}(t) > 0 \wedge \exists l < \mathrm{len}(t) \wedge \exists w \leq 1([t]_l = \langle 0, y', w\rangle)]$ である．$s \upharpoonright 1 = [[s]_0]$ に注意せよ．

<u>CaseB-1:</u> $[s]_0 = \ulcorner(u = u')\urcorner$ のとき．ただし $\mathrm{term}(u), \mathrm{term}(u')$

y' を任意に取る．$\mathrm{val}(u, y') = \mathrm{val}(u', y')$ なら $t = [\langle 0, y', 1\rangle]$ が，$\mathrm{val}(u, y) \neq \mathrm{val}(u', y')$ なら $t = [\langle 0, y', 0\rangle]$ が $\mathrm{satseq}(s \upharpoonright 1, t)$ を満たす．

<u>CaseB-2:</u> $[s]_0 = \ulcorner(u < u')\urcorner$ のとき．ただし $\mathrm{term}(u), \mathrm{term}(u')$

y' を任意に取る．$\mathrm{val}(u, y') < \mathrm{val}(u', y')$ なら $t = [\langle 0, y', 1\rangle]$ が，$\mathrm{val}(u, y) \geq \mathrm{val}(u', y')$ なら $t = [\langle 0, y', 0\rangle]$ が $\mathrm{satseq}(s \upharpoonright 1, t)$ を満たす．

<u>Induction:</u> $i < \mathrm{len}(s)$ について $\theta(i-1, s)$ を仮定し $\theta(i, s)$ を示す．

示すべきは $\forall y' \exists t[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (m+1), t) \wedge \mathrm{len}(t) > 0 \wedge \exists l < \mathrm{len}(t) \wedge \exists w \leq 1([t]_l = \langle m, y', w\rangle)]$ である．Base 同様 $[s]_i$ の形に応じて場合分けを行う．読者の便宜のためにここに帰納法の仮定を明示しておく．

$$\forall m \leq i-1 \forall y' \exists t[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (m+1), t) \wedge \mathrm{len}(t) > 0 \wedge \exists l < \mathrm{len}(t) \wedge \exists w \leq 1([t]_l = \langle m, y', w\rangle)]$$

<u>CaseI-1:</u> $[s]_i = \ulcorner(u *^R u')\urcorner$ のとき．ただし $\mathrm{term}(u), \mathrm{term}(u')$ で $*^R$ は $=$ か $<$．

CaseB-1,2 と同様である．

<u>CaseI-2:</u> $[s]_i = \ulcorner([s]_j *^L [s]_k)\urcorner$ のとき．ただし $j, k < i$ で $*^L$ は $\wedge$ か $\vee$．

y' を任意に取る．いま $j, k \leq i-1$ なので帰納法の仮定から t_j, l_j, w_j と t_k, l_k, w_k で以下を満たすものが存在する．

$$\mathrm{satseq}(s \upharpoonright (j+1), t_j) \wedge \mathrm{len}(t_j) > 0 \wedge l_j < \mathrm{len}(t_j) \wedge [t]_l = \langle j, y', w_j\rangle$$

$$\mathrm{satseq}(s \upharpoonright (k+1), t_k) \wedge \mathrm{len}(t_k) > 0 \wedge l_k < \mathrm{len}(t_k) \wedge [t]_k = \langle k, y', w_k\rangle$$

[*4] ここでこの節初めて $\Pi_1 \cup \Sigma_1$ 以外の帰納法公理を適用する．実際にはここも y' を有界量化にすることで $I\Sigma_1$ で示せることが Kaye[1]p128 に問として挙げられている．

このとき $w := \begin{cases} \min(w_j, w_k) & \text{if } [s]_i = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner \\ \max(w_j, w_k) & \text{if } [s]_i = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner \end{cases}$ とおき，$t := t_j^\frown t_k^\frown [\langle i, y', w\rangle]$ と定めればこの t で $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (i+1), t)$ が成り立つ．

<u>CaseI-3:</u> $[s]_i = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner$ のとき．ただし $j < i$.

y' を任意に取る．いま $j \leq i-1$ なので帰納法の仮定から t_j, l_j, w_j で以下を満たすものが存在する．

$$\mathrm{satseq}(s \upharpoonright (j+1), t_j) \wedge \mathrm{len}(t_j) > 0 \wedge l_j < \mathrm{len}(t_j) \wedge [t]_l = \langle j, y', w_j\rangle$$

このとき $w := 1 - w_j$ とおき，$t := t_j^\frown [\langle i, y', w\rangle]$ と定めればこの t で $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (i+1), t)$ が成り立つ．

<u>CaseI-4:</u> $[s]_i = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \wedge [s]_j))\urcorner$ のとき．ただし $j < i, k \leq s, \mathrm{term}(u)$.

y' を任意に取る．まず次が成り立つことを p の $\mathrm{val}(u, y')$ までの帰納法で示す．

$$\begin{aligned} &\forall p \leq \mathrm{val}(u, y') \exists t [\mathrm{satseq}(s \upharpoonright (j+1), t) \wedge \mathrm{len}(t) > 0 \\ &\qquad\qquad \wedge \forall r < p \exists l < \mathrm{len}(t) \exists w \leq 1([t]_l = \langle j, y'[r/k], w\rangle)] \end{aligned} \tag{3.1}$$

$p = 0$ はいま $j \leq i-1$ なので帰納法の仮定 $\theta(i-1, s)$ から明らか．次に $p < \mathrm{val}(u, y')$ について以下を満たす t が存在したとする．

$$\mathrm{satseq}(s \upharpoonright (j+1), t) \wedge \mathrm{len}(t) > 0 \wedge \forall r < p \exists l < \mathrm{len}(t) \exists w \leq 1([t]_l = \langle j, y'[r/k], w\rangle)$$

このとき再び帰納法の仮定 $\theta(i-1, s)$ において y' を $y'[p/k]$ として次を満たす t' を得る．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j+1), t') \wedge \mathrm{len}(t') > 0 \wedge \exists l < \mathrm{len}(t') \wedge \exists w \leq 1([t']_l = \langle j, y'[p/k], w\rangle)$$

よって $t'' := t^\frown t'$ とすればこの t'' は (3.1) の $p+1$ の場合の条件を満たす．よって (3.1) の帰納法が完了した．以上より次を満たす t が存在する．

$$\mathrm{satseq}(s \upharpoonright (j+1), t) \wedge \mathrm{len}(t) > 0 \wedge \forall r < \mathrm{val}(u, y') \exists l < \mathrm{len}(t) \exists w \leq 1([t]_l = \langle j, y'[r/k], w\rangle)$$

ここで $w := \begin{cases} 1 & \text{if } \exists r < \mathrm{val}(u, y') \exists l < \mathrm{len}(t)([t]_l = \langle j, y'[r/k], 1\rangle) \\ 0 & \text{if } \neg\exists r < \mathrm{val}(u, y') \exists l < \mathrm{len}(t)([t]_l = \langle j, y'[r/k], 1\rangle) \end{cases}$ とおき，$t' := t^\frown [\langle i, y', w\rangle]$ と定めれば $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (i+1), t')$ が成り立つ．

<u>CaseI-4:</u> $[s]_i = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k < u)) \vee [s]_j))\urcorner$ のとき．ただし $j < i, k \leq s, \mathrm{term}(u)$.

CaseI-3 の証明において w の定義中の $\exists r < \cdots$ を $\forall r < \cdots$ とすればよい．以上で $\theta(i, s)$ が確認できた． □

補題 3.9.

$$PA \vdash \forall s, t, s', t', i, i', l, l', w, w', y$$

$$[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s', t') \wedge [s]_i = [s']_{i'} \wedge [t]_l = \langle i, y, w\rangle \wedge [t']_{l'} = \langle i', y, w'\rangle \to w = w']$$

証明. s, t, s', t' を任意にとって固定しておく．次の論理式を $\varphi(x, s, t, s', t')$ とおき，$\forall x \varphi(x, s, t, s', t')$ を示せば十分.

$$\begin{aligned}\forall l, l' \leq x \forall y, i, i', w, w' [&\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s', t') \wedge [s]_i = [s']_{i'} \\ &\wedge [t]_l = \langle i, y, w \rangle \wedge [t']_{l'} = \langle i', y, w' \rangle \to w = w']\end{aligned}$$

Base: $x = 0$，すなわち $l = l' = 0$ の場合.

以下を満たす y, i, i', w, w' を任意にとる.

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s', t') \wedge [s]_i = [s']_{i'} \wedge [t]_0 = \langle i, y, w \rangle \wedge [t']_0 = \langle i', y, w' \rangle$$

このとき，$[s]_i$ と $[s']_{i'}$ はともに原始論理式か有界量化の論理式である．後者なら $w = w'$ は明らかなのでともに原子論理式であるとする．このとき項の一意解読性からある $\mathrm{term}(u), \mathrm{term}(u')$ なる u, u' によって

$$[s]_i = \ulcorner(u = u')\urcorner = [s']_{i'} \text{もしくは} [s]_i = \ulcorner(u < u')\urcorner = [s']_{i'}$$

である．前者なら

$$w = 1 \leftrightarrow \mathrm{val}(u, y') = \mathrm{val}(u', y) \leftrightarrow w' = 1$$

であり，後者なら

$$w = 1 \leftrightarrow \mathrm{val}(u, y') < \mathrm{val}(u', y) \leftrightarrow w' = 1$$

となるのでいずれにせよ $w = w'$ である.

Induction:

以下を満たす $l, l' \leq x + 1, y, i, i', w, w'$ を任意にとる.

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s', t') \wedge [s]_i = [s']_{i'} \wedge [t]_l = \langle i, y, w \rangle \wedge [t']_{l'} = \langle i', y, w' \rangle$$

$[s]_i$ の形に応じて場合分けをする.

CaseI-1: $[s]_i = [s']_{i'}$ が原始論理式の場合.

Base と全く同様である.

CaseI-2: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner([s]_j \wedge [s]_k)\urcorner (j, k < i)$ のとき.

$j', k' < i'$ で $[s']_{i'} = \ulcorner([s']_{j'} \wedge [s']_{k'})\urcorner$ となるものが存在する（$[s']_{i'}$ が他の形の場合矛盾が生じる）．すると論理式の一意解読性より $[s]_j = [s']_{j'}$ かつ $[s]_k = [s']_{k'}$ である．いま $\mathrm{satseq}(s, t)$，$\mathrm{satseq}(s', t')$ であるから，以下を満たす $l_1, l_2 < l, w_1, w_2 \leq 1, l'_1, l'_2 < l, w'_1, w'_2 \leq 1$ が存在する.

$$[t]_{l_1} = \langle j, y, w_1 \rangle \wedge [t]_{l_2} = \langle k, y, w_2 \rangle \wedge (w = 1 \leftrightarrow w_1 = 1 \wedge w_2 = 1)$$

$$[t]_{l'_1} = \langle j', y, w'_1 \rangle \wedge [t']_{l'_2} = \langle k', y, w_2 \rangle \wedge (w' = 1 \leftrightarrow w'_1 = 1 \wedge w'_2 = 1)$$

いま $l_1, l_2 \leq x$ で $[s]_j = [s']_{j'}$ だったことを思い出せば帰納法の仮定によって $w_1 = w'_1$ だと分かる．同様に $w_2 = w'_2$ でもあるので $w = w'$ が成り立つ.

CaseI-3: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner([s]_j \vee [s]_k)\urcorner (j, k < i)$ のとき.

CaseI-2 と同様である.

CaseI-4: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner (j < i)$ のとき．

CaseI-2 と同様の議論をすればよいので省略する．

CaseI-5: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \land [s]_j))\urcorner$ のとき．ただし $j < i, k \le s, \mathrm{term}(u)$.

$j' < i'$ で $[s']_{i'} = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < u) \land [s']_{j'}))\urcorner$ となるものが存在する．このとき $[s]_j = [s']_{j'}$ であり，$\mathrm{satseq}(s,t)$ と $\mathrm{satseq}(s',t')$ より

$$\forall r < \mathrm{val}(u,y)[\exists l_1 < l \exists w_1 \le 1([t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], w_1\rangle) \land \exists l'_1 < l' \exists w'_1 \le 1([t']_{l'_1} = \langle j', y[r/k], w'_1\rangle)]$$

であり，

$$w = 1 \leftrightarrow \exists r < \mathrm{val}(u,y) \exists l_1 < l([t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], 1\rangle)$$
$$w' = 1 \leftrightarrow \exists r < \mathrm{val}(u,y) \exists l'_1 < l([t']_{l'_1} = \langle j', y[r/k], 1\rangle)$$

となる．したがって $w = 1$ と仮定すると，ある $r < \mathrm{val}(u,y)$ と $l_1 < l$ で $[t]_{l_1} = \langle j, y[r/k], 1\rangle$ となる．この r に対して $[t']_{l'_1} = \langle j', y[r/k], w'_1\rangle)$ となる $l'_1 < l'$ と $w'_1 \le 1$ が存在する．ここで $[s]_j = [s']_{j'}$ だったことを思い出せば，帰納法の仮定から $w'_1 = 1$ が従うので $w' = 1$ でもある．全く同様にして $w' = 1 \Rightarrow w = 1$ も成り立つので $w = w'$ である．

CaseI-6: $[s]_i = [s']_{i'} = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_k((\neg(\mathsf{v}_k < u)) \lor [s]_j))\urcorner$ のとき．ただし $j < i, k \le s, \mathrm{term}(u)$.

CaseI-5 と同様である．

$\square$

定理 3.10. $PA \vdash \forall x, y(\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y) \leftrightarrow$

$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x) \land \forall s, t(s, t \text{ determines } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y) \to \exists i < \mathrm{len}(s) \exists l < \mathrm{len}(t)([t]_l = \langle i, y, 1\rangle \land [s]_i = x)))$

したがって $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ は $\Delta_1(PA)$ である．

証明. x, y は固定しておく．

$(\rightarrow)$ まず $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ の定義により，ある s, t で，

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \land \mathrm{last}(s) = x \land \exists l < \mathrm{len}(t)([t]_l = \langle \mathrm{len}(s) - 1, y, 1\rangle)$$

となるものが存在する．いま任意に s', t' をとって s', t' determines $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ と仮定したとき，その定義から $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t')$ であり，ある $l' < \mathrm{len}(t')$ と $i' < \mathrm{len}(s')$ と $w' \le 1$ で $[s']_{i'} = x \land [t']_{l'} = \langle i', y, w'\rangle$ となるものが存在する．するとある $l < \mathrm{len}(t)$ で

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \land \mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land [s']_{i'} = x = [s]_{\mathrm{len}(s)-1} \land [t']_{l'} = \langle i', y, w'\rangle \land [t]_l = \langle \mathrm{len}(s) - 1, y, 1\rangle$$

となるので，補題 3.9 より $w' = 1$ が導かれる．

$(\leftarrow)$ 仮定より $\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ なので補題 3.8 より s, t determines $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ を満たす s, t が存在する．するとこのとき再び仮定よりある $i < \mathrm{len}(s)$ と $l < \mathrm{len}(t)$ で $[t]_l = \langle i, y, 1\rangle \land [s]_i = x$ となるものが存在しているので，$s' := s^\frown[x], t' := t^\frown[\langle \mathrm{len}(s') - 1, y, 1\rangle]$ とおけば

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = x \land [t']_{\mathrm{len}(t')-1} = \langle \mathrm{len}(s') - 1, y, 1\rangle$$

が成り立つ．したがって $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(x,y)$ が得られたことになる． $\square$

定理 3.11. 次が PA で証明可能.

$$
\begin{aligned}
\forall y, i, r, s, u, v \{ &\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(u) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(v) \to \\
&\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (r = s) \urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{val}(r, y) = \mathrm{val}(s, y) && \wedge \\
&\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (r < s) \urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{val}(r, y) < \mathrm{val}(s, y) && \wedge \\
&\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (u \wedge v) \urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y) \wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y) && \wedge \\
&\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (\neg u) \urcorner, y) \leftrightarrow \neg \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y) && \wedge \\
&\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (u \vee v) \urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y) \vee \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y) && \wedge \\
&\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner ((\exists \mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i < r) \wedge u) \urcorner, y) \leftrightarrow \exists x < \mathrm{val}(r, y) \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i]) && \wedge \\
&\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u)) \urcorner, y)) \leftrightarrow \forall x < \mathrm{val}(r, y) \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i]) \}
\end{aligned}
$$

証明. y, i と $\mathrm{term}(r) \wedge \mathrm{term}(s) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(u) \wedge \mathrm{form}_{\Delta_0}(v)$ を満たす r, s, u, v を任意にとって固定しておく.

<u>Claim1:</u> $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (r = s) \urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{val}(r, y) = \mathrm{val}(s, y)$.

$(\to)$ 仮定より次を満たす s, t が存在する.

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = \ulcorner (r = s) \urcorner \wedge \exists l < \mathrm{len}(t)([t]_l = \langle \mathrm{len}(s) - 1, y, 1 \rangle) \tag{3.2}$$

よってある $l < \mathrm{len}(t)$ で $[t]_l = \langle \mathrm{len}(s) - 1, y, 1 \rangle)$ であって $[s]_{\mathrm{len}(s)-1} = \mathrm{last}(s) = \ulcorner (r = s) \urcorner$ なので $\mathrm{val}(r, y) = \mathrm{val}(s, y)$ となる.

$(\leftarrow)$ $s = [\ulcorner (r = s) \urcorner], t = [\langle 0, y, 1 \rangle]$ とすれば 3.2 が満たされる.

<u>Claim2:</u> $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (r = s) \urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{val}(r, y) < \mathrm{val}(s, y)$.

Claim1 と同様である.

<u>Claim3:</u> $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (u \wedge v) \urcorner, y) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y) \wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y)$.

$(\to)$ 仮定より次を満たす s, t が存在する

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = \ulcorner (u \wedge v) \urcorner \wedge \exists l < \mathrm{len}(t)([t]_l = \langle \mathrm{len}(s) - 1, y, 1 \rangle)$$

このとき $\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)$ と論理式の一意解読性よりある $j, k < \mathrm{len}(s) - 1$ が存在して

$$\ulcorner (u \wedge v) \urcorner = [s]_{\mathrm{len}(s)-1} = \ulcorner ([s]_j \wedge [s]_k) \urcorner$$

となり, $[s]_j = u \wedge [s]_k = v$ でもある. よって $l_1, l_2 < l$ で以下を満たすものが存在する.

$$[t]_{l_1} = \langle j, y, 1 \rangle \wedge [t]_{l_2} = \langle k, y, 1 \rangle$$

したがって $s \upharpoonright (j + 1), t \upharpoonright (l_1 + 1)$ によって

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s \upharpoonright (j + 1), t) \wedge \mathrm{last}(s \upharpoonright (j + 1)) = [s]_j = u \wedge [t \upharpoonright (l_1 + 1)]_{l_1} = \langle s \upharpoonright (j + 1) - 1, y, 1 \rangle)$$

が成り立つので $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y)$ が分かり, 同様に $s \upharpoonright (k + 1), t \upharpoonright (l_2 + 1)$ によって $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y)$ が分かる.

$(\leftarrow)$ $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y)$ と $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v, y)$ から以下を満たす s, t, s', t' がとれる.

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s, t) \wedge \mathrm{last}(s) = u \wedge \exists l < \mathrm{len}(t)([t]_l = \langle \mathrm{len}(s) - 1, y, 1 \rangle)$$

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = v \land \exists l < \mathrm{len}(t')([t']_l = \langle \mathrm{len}(s')-1, y, 1\rangle)$$

よって $s'' := s^\frown s'^\frown[\ulcorner(u \land v)\urcorner], t'' := t^\frown t'^\frown[\langle \mathrm{len}(s)+\mathrm{len}(s'), y, 1\rangle]$ によって

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s'',t'') \land \mathrm{last}(s'') = \ulcorner(u \land v)\urcorner \land ([t'']_{\mathrm{len}(t'')-1} = \langle \mathrm{len}(s'')-1, y, 1\rangle)$$

が成り立つので $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u \land v)\urcorner, y)$ が分かる．

Claim4: $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y) \leftrightarrow \neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)$.

$(\rightarrow)$

仮定より次を満たす s,t が存在する

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \land \mathrm{last}(s) = \ulcorner(\neg u)\urcorner \land \exists l < \mathrm{len}(t)([t]_l = \langle \mathrm{len}(s)-1, y, 1\rangle)$$

このとき $\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)$ と論理式の一意解読性よりある $j < \mathrm{len}(s)-1$ が存在して

$$\ulcorner(\neg u)\urcorner = [s]_{\mathrm{len}(s)-1} = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner$$

となり，$[s]_j = u$ でもある．よって $l_1 < \mathrm{len}(t)$ で $[t]_{l_1} = \langle j, y, 0\rangle$ を満たすものが存在する．さて，いま示すべきは $\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)$ すなわち

$$\forall s',t'[\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = u \rightarrow \neg(\exists l' < \mathrm{len}(t')([t']_{l'} = \langle \mathrm{len}(s')-1, y, 1\rangle))]$$

であるので，まず任意に $\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = u$ を満たす s',t' をとる．もし仮にある $l' < \mathrm{len}(t')$ が存在して $[t']_{l'} = \langle \mathrm{len}(s')-1, y, 1\rangle)$ が成り立つとすると，

$$[s']_{\mathrm{len}(s')-1} = u = [s]_j$$

なので補題 3.9 より $0 = 1$ が導かれて矛盾する．

$(\leftarrow)$ まず $\mathrm{form}_{\Delta_0}(u)$ より $\mathrm{form}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner)$ なので，補題 3.8 より，ある s,t で s,t determines $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y)$ すなわち

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \land \exists l < \mathrm{len}(t) \exists i < \mathrm{len}(s) \exists w \leq 1([s]_i = \ulcorner(\neg u)\urcorner \land [t]_l = \langle i, y, w\rangle)$$

が成り立つ．よってここで $l < \mathrm{len}(t), i < \mathrm{len}(s), w \leq 1$ を $[s]_i = \ulcorner(\neg u)\urcorner \land [t]_l = \langle i, y, w\rangle$ となるようにとれば，論理式の一意解読性と $\mathrm{formseq}_{\Delta_0}(s)$ よりある $j < i$ で $[s]_i = \ulcorner(\neg[s]_j)\urcorner$ かつ $[s]_j = u$ となる．してがってある $l_1 < l$ と $w_1 \leq 1$ で $[t]_{l_1} = \langle j, y, w_1\rangle$ を満たすものが存在する．このとき

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}((s \upharpoonright (j+1)), t \upharpoonright (l_1+1)) \land \mathrm{last}(s \upharpoonright (j+1)) = u \land [t \upharpoonright (l_1+1)]_{l_1} = \langle j, y, w_1\rangle$$

が成り立つ．いま $\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)$ すなわち

$$\forall s',t'(\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t') \land \mathrm{last}(s') = u \rightarrow \forall l' < \mathrm{len}(t')[t']_{l'} \neq \langle \mathrm{len}(s'), y, 1\rangle)$$

を仮定しているので $w_1 = 0$ だと分かる．ゆえに $w = 1 \leftrightarrow w_1 = 0$ より $w = 1$ が導かれる．以上から $s \upharpoonright (i+1), t \upharpoonright (l+1)$ によって $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y)$ だと分かる．

Claim5: $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u\lor v)\urcorner,y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\lor\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)$.

($\rightarrow$) Claim3 の ($\rightarrow$) と同様である．

($\leftarrow$)

Case(i) $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\land\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)$ のとき．

Claim3 の ($\leftarrow$) と同様である．

Case(ii) $\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\land\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)$ のとき．

Claim3,4 より

$$\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\land\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner,y)\land\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)\leftrightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner((\neg u)\land v)\urcorner,y)$$

であり，Sat_{Δ_0} の定義より明らかに $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner((\neg u)\land v)\urcorner,y)\rightarrow\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(u\lor v)\urcorner,y)$ である．

Case(iii) $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y)\land\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(v,y)$ のとき．

Case(ii) と同様である．

Claim6: $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land u))\urcorner,y)\leftrightarrow\exists x<\mathrm{val}(r,y)\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[x/i])$.

($\rightarrow$) 仮定より以下を満たす s,t が存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\land\mathrm{last}(s)=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land u))\urcorner\land\exists l<\mathrm{len}(t)([t]_l=\langle\mathrm{len}(s)-1,y,1\rangle)$$

このときある $j<\mathrm{len}(s)$ が存在して，

$$\begin{aligned}[s]_{\mathrm{len}(s)-1}&=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land u))\urcorner\\&=\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land[s]_j))\urcorner\end{aligned}$$

となり $[s]_j=u$ が成り立つ．またある $l<\mathrm{len}(t)$ で $[t]_l=\langle\mathrm{len}(s)-1,y,1\rangle$ となることから，$x<\mathrm{val}(r,y)$ と $l_1<l$ が存在して $[t]_{l_1}=\langle j,y[x/i],1\rangle$ である．したがって $s\restriction(j+1),t\restriction(l_1+1)$ によって

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}((s\restriction(j+1)),t\restriction(l_1+1))\land\mathrm{last}(s\restriction(j+1))=u\land[t\restriction(l_1+1)]_{l_1}=\langle j,y[x/i],1\rangle$$

であるので $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[x/i])$ だと分かる．

($\leftarrow$) 対偶を示す．$\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land u))\urcorner,y)$ すなわち $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land u)))\urcorner,y)$ を仮定する．このときもし仮にある $x<\mathrm{val}(r,y)$ が存在して $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u,y[x/i])$ が成り立ったとすると，ある s',t' と $l'<\mathrm{len}(t')$ で以下を満たすものが存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s',t')\land\mathrm{last}(s')=u\land[t']_{l'}=\langle\mathrm{len}(s')-1,y[x/i],1\rangle$$

一方 $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land u)))\urcorner,y)$ よりを次を満たす s,t と $l<\mathrm{len}(t)$ が存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t)\land\mathrm{last}(s)=\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land u)))\urcorner\land[t]_l=\langle\mathrm{len}(s)-1,y,1\rangle$$

するとある $j<k<\mathrm{len}(s)$ が存在して，

$$\begin{aligned}[s]_{\mathrm{len}(s)-1}&=\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land u)))\urcorner\\&=\ulcorner(\neg[s]_k)\urcorner\\&=\ulcorner(\neg(\exists\mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i<r)\land[s]_j)))\urcorner\end{aligned}$$

となり $[s]_k = \ulcorner(\exists \mathsf{v}_i((\mathsf{v}_i < r) \wedge [s]_j))\urcorner$ と $[s]_j = u$ も成り立つ．また $[t]_l = \langle \mathrm{len}(s)-1, y, 1\rangle$ よりある $l_k < l$ で $[t]_{l_k} = \langle k, y, 0\rangle$ となり，

$$\forall z < \mathrm{val}(r,y)\exists l_j < l_k \exists w \leq 1([t]_{l_j} = \langle j, y[z/i], w\rangle) \wedge \forall z < \mathrm{val}(r,y)\forall l_j < l_k([t]_{l_j} = \langle j, y[z/i], 0\rangle)$$

が成り立つ．よって特に $x(< \mathrm{val}(r,y))$ について，ある $l_1 < l_k$ が存在して $[t]_{l_1} = \langle j, y[x/i], 0\rangle$ が成り立つが，

$$[s]_j = u = [s']_{\mathrm{len}(s)-1} \wedge [t]_{l_1} = \langle j, y[x/i], 0\rangle \wedge [t']_{l'} = \langle \mathrm{len}(s')-1, y[x/i], 1\rangle$$

なので補題 3.9 より $0=1$ が導かれて矛盾する．

Claim7: $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u))\urcorner, y)) \leftrightarrow \forall x < \mathrm{val}(r,y)\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i])$

Claim6 と同様である．

($\leftarrow$) 対偶を示す．$\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u))\urcorner, y)$ と仮定すると Claim4 より $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u)))\urcorner, y)$ であるので，以下を満たす s, t および $l < \mathrm{len}(t)$ が存在する．

$$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}(s,t) \wedge \mathrm{last}(s) = \ulcorner(\neg(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u)))\urcorner \wedge [t]_l = \langle \mathrm{len}(s)-1, y, 1\rangle$$

このときある $j < k < \mathrm{len}(s)-1$ で

$$\begin{aligned}[s]_{\mathrm{len}(s)-1} &= \ulcorner(\neg(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee u)))\urcorner \\ &= \ulcorner(\neg[s]_k)\urcorner \\ &= \ulcorner(\neg(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee [s]_j)))\urcorner.\end{aligned}$$

となり $[s]_k = \ulcorner(\forall \mathsf{v}_i((\neg(\mathsf{v}_i < r)) \vee [s]_j))\urcorner$ と $[s]_j = u$ も成り立つ．また $[t]_l = \langle \mathrm{len}(s)-1, y, 1\rangle$ よりある $l_k < l$ が存在して $[t]_{l_k} = \langle k, y, 0\rangle$ となるので

$$\forall z < \mathrm{val}(r,y)\exists l_j < l_k \exists w \leq 1([t]_{l_j} = \langle j, y[z/i], w\rangle) \wedge \exists z < \mathrm{val}(r,y)\forall l_j < l_k([t]_{l_j} = \langle j, y[z/i], 0\rangle)$$

が成り立つ．したがってある $x < \mathrm{val}(r,y)$ と $l_j < l_k$ が存在して $[t]_{l_j} = \langle j, y[x/i], 0\rangle$ が導かれる．するとこの x で $\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner(\neg u)\urcorner, y[x/i])$ すなわち $\neg\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(u, y[x/i])$ が成り立つ． □

系 3.12. $\mathscr{L}_A$ の任意の Δ_0 論理式 $\theta(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1 ..., \mathsf{v}_k)$（論理式に含まれる自由変数は $\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_k$ のみ）に対して次が成り立つ．

$$PA \vdash \forall a_0, ..., a_{n-1}, b[\theta(a_0, ..., a_{n-1}) \leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner\theta(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_{n-1})\urcorner, [a_0, ..., a_{n-1}]^\frown b)]$$

証明． $\mathscr{L}_A$ 論理式の複雑さによる帰納法で示す．

Base: 原子論理式の場合

まず $\theta(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_{n-1})$ を $(r(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_{n-1}) = s(\mathsf{v}_0, ..., \mathsf{v}_{n-1}))$ とする（r, s は本物の $\mathscr{L}_A$ の項）．すると系 3.4 より任意にとった $a_0, ..., a_{n-1}, b$ について

$$r(a_0, ..., a_{n-1}) = \mathrm{val}(\ulcorner r\urcorner, [x_0, ..., x_{n-1}]^\frown[b]) \wedge s(a_0, ..., a_{n-1}) = \mathrm{val}(\ulcorner s\urcorner, [x_0, ..., x_{n-1}]^\frown[b])$$

であるので，

$$r(a_0,...,a_{n-1}) = s(a_0,...,a_{n-1}) \leftrightarrow \mathrm{val}(\ulcorner r \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown[b]) = \mathrm{val}(\ulcorner s \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown[b])$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner (r = s) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown[b])$$

$\theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1})$ が $(r < s)$ である場合も同様．

induction:

$\theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) = \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \wedge \theta_v(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1})$ なら帰納法の仮定から 任意の $a_0,...,a_{n-1},b$ について

$$\theta(a_0,...,a_{n-1}) \leftrightarrow \theta_u(a_0,...,a_{n-1}) \wedge \theta_v(a_0,...,a_{n-1})$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \wedge \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta_v(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)$$

となる．本質的なのは存在量化である．束縛変数の位置で場合分けして考える．

Case1: $\theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) = \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \wedge \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1}))$

任意の $a_0,...,a_{n-1},b$ について

$$\theta(a_0,...,a_{n-1}) \leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \wedge \theta_u(a_0,...,\mathsf{v}_k,...,a_{n-1}))$$
$$\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < r\ \theta_u(a_0,...,\mathsf{v}_k,...a_{n-1}) \quad (\text{上の略記})$$
$$\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で} \theta_u(a_0,...,x,...a_{n-1})$$
$$\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,x,...a_{n-1}]^\frown b) \quad (\because \text{帰納法の仮定})$$
$$\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, ([a_0,...,a_k,...,a_{n-1}]^\frown b)[x/k])$$
$$\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < r\ \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[\mathsf{v}_k/k]))$$
$$\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < \mathrm{val}(\ulcorner r \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)\mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1})) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[\mathsf{v}_k/k])$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \wedge \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_k,...,\mathsf{v}_{n-1})) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \quad (\because \text{定理 } 3.11)$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)$$

Case2: $\theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) = \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \wedge \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k))$

任意の $a_0,...,a_{n-1},b$ について

$$\theta(a_0,...,a_{n-1}) \leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \wedge \theta_u(a_0,...,a_{n-1},...,\mathsf{v}_k))$$
$$\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < r\ \theta_u(a_0,...,a_{n-1},...,\mathsf{v}_k) \quad (\text{上の略記})$$
$$\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で} \theta_u(a_0,...,a_{n-1},...,x)$$
$$\leftrightarrow \text{ある } x < r \text{ で } \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k)) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[x/k]) \quad (\because \text{帰納法の仮定})$$
$$\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < r\ \mathrm{Sat}_{\Delta_0}(\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[\mathsf{v}_k/k])$$
$$\leftrightarrow \exists \mathsf{v}_k < \mathrm{val}(\ulcorner r \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)\mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k) \urcorner, ([a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)[\mathsf{v}_k/k]))$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \exists \mathsf{v}_k((\mathsf{v}_k < r) \wedge \theta_u(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1},...,\mathsf{v}_k)) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b) \quad (\because \text{定理 } 3.11)$$
$$\leftrightarrow \mathrm{Sat}_{\Delta_0}((\ulcorner \theta(\mathsf{v}_0,...,\mathsf{v}_{n-1}) \urcorner, [a_0,...,a_{n-1}]^\frown b)$$

□

参考文献

[1] Richard Kaye, “Models of Peano Arithmetic”，(Oxford logic guides, 15)(Oxford science publications) Clarendon Press , Oxford University Press,1991.