普遍 light face Π^0_1 論理式の構成

橋本 航気

2022 年 8 月 13 日

定義 0.1 (Simpson[1]VII.1.3 普遍 light face Π^0_1 論理式).

$$\pi(e, m_1, m_2, ..., m_i, X_1, ..., X_j)$$

を Π^0_1 論理式で自由変数は表示したものしか持たないとする．π が次の性質を満たすとき，普遍 light face Π^0_1 という．π と同じ自由変数をもつ任意の Π^0_1 論理式 θ について，

$$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall e \exists e' \forall m_1, ..., X_1, ...(\theta(e', m_1, ..., m_i, X_1, ..., X_j) \leftrightarrow \pi(e, m_1, ..., m_i, X_1, ..., X_j))$$

が成り立つ．

このような π は，Kaye[2] 9 章の Sat_{Π_1}（筆者のホームページに Sat_{Δ_0} に関する PDF があります．）に少しの変更を加えることで得られる[*1]．もう少し詳しく述べる．まず数変数 $\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1, ...$ と集合変数 $\mathsf{V}_0, \mathsf{V}_1, ...,$ を区別するためにゲーデル数をわけ，$\mathrm{form}_{\Delta_0}(x)$ の定義は $\ulcorner \mathsf{v}_0 \in \mathsf{V}_0 \urcorner$ を判定できるように変更する．term と val に変更はなく，$\mathrm{satseq}_{\Delta_0}$ では（あくまでアイデアだが）

$$\exists u \subseteq_p [s]_i(\mathrm{term}(u) \wedge [s]_i = \ulcorner (u \in \mathsf{V}_j) \urcorner \wedge (w = 1 \leftrightarrow \mathrm{val}(u, y) \in X_j)$$

のような 1 行を加えればよい．そのような変更で上手くいくかの証明は，原理論理式の部分で 1 ステップ手間が増えるだけである．

参考文献

[1] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.

[2] Richard Kaye, “Models of Peano Arithmetic” ,（Oxford logic guides, 15）（Oxford science publications）Clarendon Press , Oxford University Press,1991.

[*1] アイデアは TH 大の L さんと S さんに教えていただきました．