任意の原始再帰関数をどこかの g_n で支配できる原始再帰関数列 $\{g_n\}_{n\in\omega}$ の構成とその証明 in PRA

橋本 航気

2022 年 10 月 28 日

概要

一階算術の $\mathrm{I}\Sigma_1$ より少し弱い体系 PRA（Primitive Recursive Arithmetic）でタイトルの定理を示すためには Δ_0 帰納法でうまくやりくりしなくてはならない．この”うまくやりくり”の部分は 3 節にまとめた．2 節の証明はメタのそれとまったく同じである．

目次

1 一階算術の形式的体系 PRA の定義 1

2 タイトルのやつ 1

3 直感的に明らかだけどちゃんとした証明は大変なやつの証明 3

1 一階算術の形式的体系 PRA の定義

書くのがめんどくさいので Simpson [2] IX.3 節を見て下さい．形式的体系に興味がない人は PRA $\vdash$ をメタだと思ってもらってもよいです．

2 タイトルのやつ

定理 2.1. 任意の原始再帰的関数（記号）f に対して，次を満たす $n \in \omega$ が存在するような原始再帰関数列 $\{g_n\}_{n\in\omega}$ が存在する[*1]．

$$\mathrm{PRA} \vdash f(x_1, ..., x_k) < g_n(\max\{x_1, ..., x_k\})$$

証明. 所望の $\{g_n\}_{n\in\omega}$ は以下のように再帰的に構成される．まず $g_0(x) = x + 1$ とする．g_n が与

*1 便宜上 $k = 0$ なら $\max\{x_1, ..., x_k\} = 0$

えられているとして，g_n をイテレートする原始再帰的関数 I_n が次のよう定まる．

$$I_n(x,0) = x$$
$$I_n(x,y+1) = g_n(I(x,y))$$

ω 上で考えると $I_n(x,y) = \underbrace{(g \circ \cdots \circ g \circ g)}_{y\text{ 個}}(x)$ であるので，この直感に沿って $I_n(x,y) = g^y(x)$ と表記しよう．そして g_{n+1} を $g_{n+1}(x) := g_n^{x+2}(x)$ と定める．以上で構成される列 $\{g_n\}_{n\in\omega}$ が原始再帰的関数の列になっていることは定義から明らか．$\{g_n\}_{n\in\omega}$ に関する基本的な性質として次が成り立つ（証明は 3 節に書いた）．

1. 任意の n について $\mathrm{PRA} \vdash \forall x, y(x < y \to g_n(x) < g_n(y))$
2. $n < m$ ならば $\mathrm{PRA} \vdash \forall x(g_n(x) < g_m(x))$

主定理は原始再帰的関数の構成に関する帰納法で示す．

ゼロ関数・後者関数・射影関数

$$Z(x) = 0 < g_0(0)$$
$$S(x) = g_0(x) < g_1(x)$$
$$P_i^k(x_1,...,x_k) = x_i \leq \max\{x_1,...,x_k\} < g_0(\max\{x_1,...,x_k\})$$

この証明中だけの略記として $\mathrm{PRA} \vdash f(x_1,...,x_k) < g_n(\max\{x_1,...,x_k\})$ を端的に $f < g_n$ と書く．

合成

m 個の k 変数関数 $f_1,...,f_m$ と m 変数関数 h について，ある $n_1,....,n_m,n_h$ で

$$f_1 < g_{n_1}, f_2 < g_{n_2}, ..., f_m < g_{n_m}, h < g_h$$

となっていたとする．このとき $n := \max\{n_1,...,n_m,n_h\}$ をとれば

$$f_1,...,f_m,h < g_n$$

となっている．任意に $x_1,...,x_k$ をとる．いま各 $1 \leq i \leq m$ について

$$f_{n_i}(x_1,...,x_k) < g_n(\max\{x_1,...,x_k\})$$

であるので，

$$\max\{f_1(x_1,...,x_k),...,f_m(x_1,...,x_k)\} < g_n(\max\{x_1,...,x_k\})$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} h(f_1(x_1,...,x_k),...,f_m(x_1,...,x_k)) &< g_n(\max\{f_1(x_1,...,x_k),...,f_m(x_1,...,x_k)\}) \\ &< g_n(g_n(\max\{x_1,...,x_k\})) && (\because g_n\text{の単調性}) \\ &\leq g_{n+1}(\max\{x_1,...,x_k\}) \end{aligned}$$

原始再帰

k 変数関数 f_0 と $k+2$ 変数関数 h について $f_0, h < g_n$ だったとする．このとき

$$f(x_1, ..., x_k, 0) = f_0(x_1, ..., x_k)$$
$$f(x_1, ..., x_k, y+1) = h(x_1, ..., x_k, y, f(x_1, ..., x_k, y))$$

で定まる f について $f < g_{n+1}$ であることを示す．$x_1, ..., x_k$ を固定し，y に関する帰納法で以下を示す．

$$f(x_1, ..., x_k, y) < g_n^{y+1}(\max\{x_1, ..., x_k, y\})$$

$y = 0$ なら自明．

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_k, y+1) &= h(x_1, ..., x_k, y, f(x_1, ..., x_k, y)) \\ &< g_n(\max\{x_1, ..., x_k, y, f(x_1, ..., x_k, y)\}) \\ &\leq g_n(\max\{x_1, ..., x_k, y, g_n^{y+1}(\max\{x_1, ..., x_k, y\})\}) \quad (\because \text{帰納法の仮定と } g_n \text{の単調性}) \\ &\leq g_n(g_n^{y+1}(\max\{x_1, ..., x_k, y\})) \quad (\because x_1, ..., x_k, y < g_n^{y+1}(\max\{x_1, ..., x_k, y\})) \\ &= g_n^{y+2}(\max\{x_1, ..., x_k, y\}) \end{aligned}$$

したがって任意の $x_1, ..., x_k, y$ について

$$f(x_1, ..., x_k, y) < g_n^{y+1}(\max\{x_1, ..., x_k, y\}) < g_{n+1}(\max\{x_1, ..., x_k, y\})$$

□

3　直感的に明らかだけどちゃんとした証明は大変なやつの証明

証明． 次の $(a)\&(b)\&(c)$ がすべての $m \in \omega$ で成り立つことを m に関する帰納法で示す．

(a) $\mathrm{PRA} \vdash \forall x, y[x < y \to g_m(x) < g_m(y)]$
(b) $\mathrm{PRA} \vdash \forall x, y[x < g_m^{y+1}(x)]$
(c) $\mathrm{PRA} \vdash \forall x(g_m(x) < g_{m+1}(x))$

以降 $(b)m$ と書いて，「m に関する (b)」を表す．また，単に帰納法の仮定といった場合，最も入れ子が浅い帰納法の仮定を指すと約束しておく．

まず $(a)0, (b)0, (c)0$ が成立することを見る．$(a)0$ は自明．

$(b)0$ は x を固定し，y に関する帰納法で示す．$y = 0$ なら $x < x + 1$ よりよい．$y + 1$ について，

$$\begin{aligned} g_0^{y+2}(x) = g_0(g_0^{y+1}(x)) &> g_0(x) \quad (\because \text{帰納法の仮定と } (a)0) \\ &> g_0(x) = x + 1 > x \end{aligned}$$

$(c)0$ x を任意にとる．このとき $(b)0$ より $g_0(x) < g_0^{x+1}(g_0(x))$ なので，$(a)0$ から以下が成り立つ．

$$g_1(x) = g_0^{x+2}(x) = g_0(g_0^{x+1}(x)) > g_0(x)$$

次に $(a)m,(b)m,(c)m$ が成立すると仮定して $m+1$ でそれぞれが成立することを見る．

$(a)m+1$ まず $x<y$ を固定しておく．定義から $g_{m+1}(y)=g_m^{y+2}(y)=g_m(g_m^{y+1}(y))$ であり，同様に $g_{m+1}(x)=g_m(g_m^{x+1}(x))$ ゆえ，$g_m^{x+1}(x)<g_m^{y+1}(y)$ を示せば $(a)m$ から帰結される．そのためには次の二つを示せば十分．

1. $\forall i[g_m^{i+1}(x)<g_m^{i+1}(y)]$
2. $\forall z(\forall w<z[g_m^{w+1}(y)<g_m^{z+1}(y)])$

実際，1 から $g_m^{x+1}(x)<g_m^{x+1}(y)$ が分かり，2 から $g_m^{x+1}(y)<g_m^{y+1}(y)$ が従う．まず 1 を i に関する帰納法で示す．$i=0$ は $(a)m$ なのでよい．$i+1$ の場合も，帰納法の仮定と $(a)m$ より

$$g_m^{i+2}(x)=g_m(g_m^{i+1}(x))<g_m(g_m^{i+1}(y))=g_m^{i+2}(y)$$

2 を z に関する帰納法で示す．$z=0$ は自明．$z=1$ とする． このとき $(a)m$ より $g_m^1(y)=g_m(y)<g_m^2(y)$.

$1\leq z$ で成立するとして $z+1$ での成立をみる．まず $w=0$ のとき．$(b)m$ より $y<g_m^{z+1}(y)$ なので $(a)m$ から

$$g_m(y)<g_m(g_m^{z+1}(y))=g_m^{z+2}(y)$$

次に w は $0<w<z+1$ だとする．$w=w'+1$ なる $w'\geq 0$ がただ一つある．$w'<z$ ゆえ，帰納法の仮定から $g_m^{w'+1}(y)<g_m^{z+1}(y)$ である．よって $(a)m$ と合わせて

$$g_m^{w+1}(y)=g_m(g_m^{w'+1}(y))<g_m(g_m^{z+1}(y))=g_m^{z+2}(y)$$

を得る．

$(b)m+1$ まず x を固定しておく．y に関する帰納法で示す．$y=0$ なら $(b)m$ より

$$x<g_m^{x+2}(x)=g_{m+1}(x)=g_{m+1}^1(x)$$

y でよいとし，$y+1$ については以下．

$$\begin{aligned}
x &< g_m(x) && (\because (b)m)\\
&< g_m(g_{m+1}^{y+1}(x)) && (\because \text{帰納法の仮定から } x<g_{m+1}^{y+1}(x)\text{，および } (a)m)\\
&< g_{m+1}(g_{m+1}^{y+1}(x)) && (\because (c)m)\\
&= g_{m+1}^{y+2}(x)
\end{aligned}$$

$(c)m+1$ x を固定しておく．先ほど示した $(b)m+1$ から $x<g_{m+1}^{x+1}(x)$ であり，$(a)m+1$ によって

$$g_{m+1}(x)<g_{m+1}(g_{m+1}^{x+1}(x))=g_{m+1}^{x+2}(x)=g_{m+2}(x)$$

以上ですべての帰納法が完了した．

$n<m$ ならば $\mathrm{PRA}\vdash\forall x(g_n(x)<g_m(x))$ を示す．n を個定し，

$$\forall m>n[\mathrm{PRA}\vdash\forall x(g_n(x)<g_m(x))]$$

を m に関する帰納法で示す．$m=n+1$ なら (c) そのものである．$m+1$ についても (c) と帰納法の仮定から即座に成り立つ． □

参考文献

[1] 田中 一之, “数学基礎論序説　数の体系への論理的アプローチ” , 裳華房,2019.

[2] S. G. Simpson, Subsystems of Second Order Arithmetic, Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, 1999.